第５章　微分の応用

§１　接線の方程式

1.1　復習(平均変化率)

平均変化率とは？

極限_第 10 回より

関数 $y = f(x)$ において,

独立変数 x が $x = a$ から $x = b$ に変化する量を

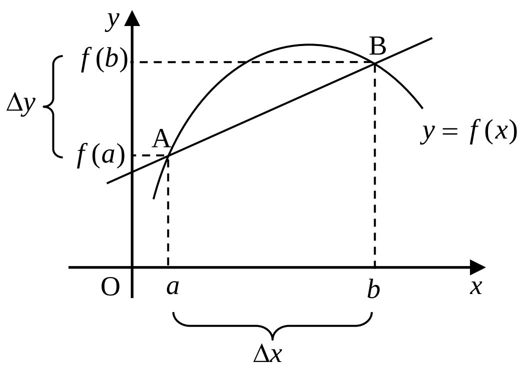
x の**増分**といい,［記号］　$\Delta x = b - a$　で表す。

このとき，従属変数 y の変化する量を

y の**増分**といい,［記号］　$\Delta y = f(b) - f(a)$　で表す。

更に，各変数の増分の割合を**平均変化率**という。

［平均変化率］　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



【注意】
○増分は，必ず
「変化後」から「変化前」を引く
○「平均変化率」の図形的意味は
直線 AB の傾きである。

1.2　復習(微分係数)

微分係数とは？

極限_第 10 回より

平均変化率において,

$x = b$ を限り無く $x = a$ に近づけるとき［記号：$b \to a$］,

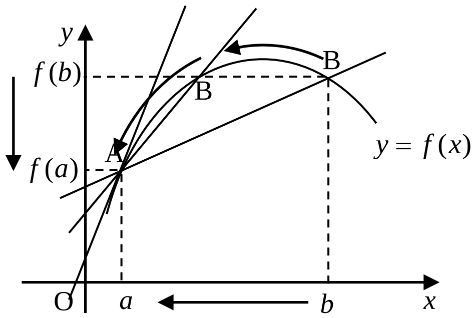
平均変化率の極限値を,

$x = a$ における微分係数といい，記号 $f'(a)$　で表す

［微分係数］ $f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

※微分係数のことを，「平均変化率」に対し「瞬間変化率」とも言う。

2 点 A,B での値　　1 点 A での値



【注意】
極限操作 $b\to a$ を行うと
点 B が点 A に限り無く
近づいていきます。
つまり，「直線 AB」は，
点 A における「接線」に
近づくことがわかります。

【本日の Point】
○「平均変化率」は，「直線 AB の傾き」
○「微分係数」は，点 A における「接線の傾き」

1.3　復習(直線の方程式)

直線の方程式とは？

数学 I の TEXT より
我々は，既に直線の方程式は，
1 次関数で表されることを知っています。

［傾きが m ， y 切片が n である直線の方程式］ $y=mx+n$

⇩ （※新しい内容へ）

［傾きが m ，点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通る直線の方程式］

$$y-b=m(x-a)$$

証明）直線　$y = mx + n \cdots$① は，点 A$(a,\ b)$ を通るから

これを，①に代入すると

$b = ma + n$　　　$\therefore n = b - ma \cdots$②

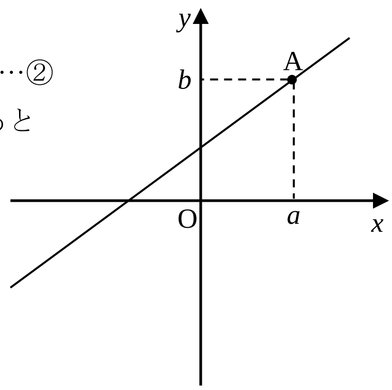
この結果②を，再び①に代入すると

$y = mx + b - ma$

$y - b = mx - ma$

$y - b = m(x - a)$

よって，求める結果が得られた。



1.4　接線の方程式

接線の方程式を求めよう

以上の復習から，次の接線の方程式に関する公式を導くことができる。

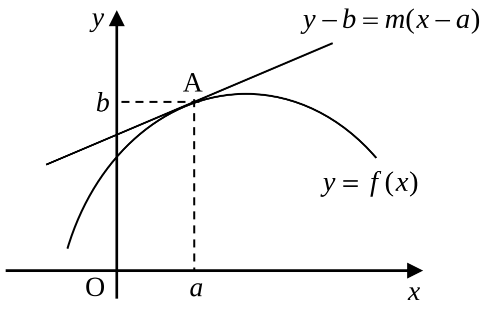
関数 $y = f(x)$ を表す曲線において，
$x = a$ に対応する点 A における接線の方程式
［接線の方程式］　$y - b = m(x - a)$
但し，y 座標　$b = f(a)$
接線の傾き　$m = f'(a)$

説明）$x = a$　における点 A の座標

A$(a,\ b) = (a,\ f(a))$

「接線の傾き：m」

＝「微分係数：$f'(a)$」



例題　関数 $f(x)=-\cos x$ を表す曲線において，

$x=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点の接線の方程式を求めよ。

［解法］①今回の x 座標は $a=\dfrac{\pi}{6}$

②y 座標を求める　$b=f(a)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（※関数は x の文字式，関数を数値化したものが y 座標）

③微分して「導関数」を求めて，「微分係数」を計算する。

導関数　$f'(x)=\sin x$　$\Rightarrow$　微分係数　$m=f'(a)=f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

（※導関数は x の文字式，導関数を数値化したものが微分係数）

［解答］　$f(x)=-\cos x$　より　$f'(x)=\sin x$

よって　$b=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$m=f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$　より

求める接線の方程式は　$y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

問 5.1　次の関数が表すグラフにおいて，

（　　）内に指定してある点に対応する接線の方程式を求めよ。

(1)　$f(x)=x^2-3x+4$　（$x=1$）

(2)　$f(x)=e^{-x}$　（$x=0$）

(3)　$f(x)=\log(x^2+1)$　（$x=1$）

(4)　$f(x)=\sqrt{3x+1}$　（$x=1$）

(5)　$f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}\,x$　（$x=1$）