§６　逆三角関数

6.1　逆三角関数

復習です

逆三角関数に関する内容を復習しておきましょう。

まずは，一般的な逆関数の話です

○関数 $y=f(x)$ において，
独立変数 x [入力側の変数]と従属変数 y [出力側の変数]の働きを入替えたものを，**逆関数**といい，記号 f^{-1} [エフ　インバース]を用いる。

$y=f(x)$ の逆関数は　$x=f(y)$　⇒　$y=f^{-1}(x)$

○独立変数 x が動く範囲を**定義域**といい，
従属変数 y が取りえる範囲を**値域**という。

逆三角関数の定義です

○ $y=\sin x$ （定義域：$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$，値域：$-1\leqq y\leqq 1$）の逆関数は

$x=\sin y$　⇒　$y=\mathrm{Sin}^{-1}x$ ［アークサイン　エックス］

（定義域：$-1\leqq x\leqq 1$，値域：$-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}$）

○ $y=\cos x$ （定義域：$0\leqq x\leqq\pi$，値域：$-1\leqq y\leqq 1$）の逆関数は

$x=\cos y$　⇒　$y=\mathrm{Cos}^{-1}x$ ［アークコサイン　エックス］

（定義域：$-1\leqq x\leqq 1$，値域：$0\leqq y\leqq\pi$）

○ $y=\tan x$ （定義域：$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，値域：$-\infty<y<+\infty$）の逆関数は

$x=\tan y$　⇒　$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ ［アークタンジェント　エックス］

（定義域：$-\infty<x<+\infty$，値域：$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$）

【注意】逆三角関数の記号
逆三角関数の記号は，専門書によっていろいろあります

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}x,\ \mathrm{Cos}^{-1}x,\ \mathrm{Tan}^{-1}x$　[先頭が大文字(TEXT で採用)]

(2) $\sin^{-1}x,\ \cos^{-1}x,\ \tan^{-1}x$　[先頭が小文字]

(3) $\arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x$　［-1 の代りに arc を先頭付ける］　など

【演習①】次の逆三角関数の値(角度)を求めよ。

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{\qquad}$　　(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{\qquad}$

(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\boxed{\qquad}$　　(答) (1) $\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$ (3) $\dfrac{\pi}{6}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$ (1)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$ (2)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$ (3)	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×

【演習②】次の逆三角関数の値(角度)を求めよ。

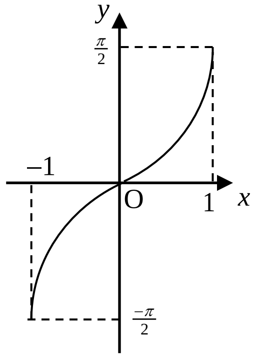
(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{\qquad}$　　(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{\qquad}$

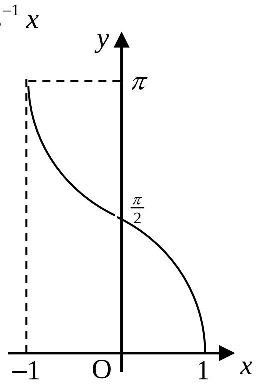
(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\boxed{\qquad}$　　(答) (1) $-\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\dfrac{3}{4}\pi$ (3) $-\dfrac{\pi}{6}$

［公式］ (1) $\mathrm{Sin}^{-1}(-x)=-\mathrm{Sin}^{-1}x$
(2) $\mathrm{Cos}^{-1}(-x)=\pi-\mathrm{Cos}^{-1}x$　　(※注意)
(3) $\mathrm{Tan}^{-1}(-x)=-\mathrm{Tan}^{-1}x$

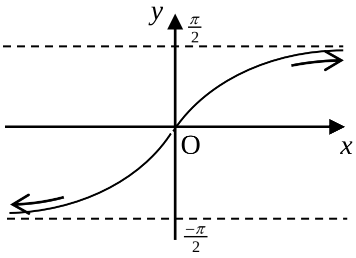
逆三角関数のグラフです。
［※逆関数のグラフは，直線 $y=x$ に関する対称移動となります］

(1) $y=\mathrm{Sin}^{-1}x$　　(2) $y=\mathrm{Cos}^{-1}x$





(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1} x$



［極限］(4) $\lim_{x \to +\infty} (\mathrm{Tan}^{-1} x) = \dfrac{\pi}{2}$

(5) $\lim_{x \to -\infty} (\mathrm{Tan}^{-1} x) = -\dfrac{\pi}{2}$

6.2　逆関数の微分

逆関数の微分とは？

逆関数に関して，次の公式が成り立ちます。

［逆関数の微分］　$\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(y)}$

証明）$y = f^{-1}(x)$　より　$x = f(y)$

よって，合成関数の微分より

$$1 = f'(y) \times y'$$

従って　$\{f^{-1}(x)\}' = y' = \dfrac{1}{f'(y)}$

＝＝＝

【研究】ライプニッツの記号［利点：分数の様に取り扱える］

逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の場合の微分表記は　$\dfrac{dy}{dx} = \{f^{-1}(x)\}'$

これを，元に戻すと　$x = f(y)$

この場合の微分表記は　$\dfrac{dx}{dy} = f'(y)$

よって，［逆関数の微分］の表し方は

$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

＝＝＝

6.3　逆三角関数の微分

逆三角関数の導関数を求めます

次の微分公式が成り立ちます。

［微分公式］　(1)　$\{\mathrm{Sin}^{-1}x\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2)　$\{\mathrm{Cos}^{-1}x\}' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3)　$\{\mathrm{Tan}^{-1}x\}' = \dfrac{1}{x^2+1}$

証明）(1)　$y = \mathrm{Sin}^{-1}x$　（値域：$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$）より

$x = \sin y \cdots$①　$\Rightarrow$　$1 = \cos y \times y'$　　$\therefore\ y' = \dfrac{1}{\cos y} \cdots$②

ところで，$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$　（①より）

よって　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$　のとき，$\cos y \geqq 0$　であるから

$$\cos y = \sqrt{1-x^2} \cdots ③$$

従って，②と③より　$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2)　$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$　（値域：$0 \leqq y \leqq \pi$）より

$x = \cos y \cdots$①　$\Rightarrow$　$1 = -\sin y \times y'$　　$\therefore\ y' = \dfrac{-1}{\sin y} \cdots$②

ところで，$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$　（①より）

よって　$0 \leqq y \leqq \pi$　のとき，$\sin y \geqq 0$　であるから

$$\sin y = \sqrt{1-x^2} \cdots ③$$

従って，②と③より　$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3)　$y = \mathrm{Tan}^{-1}x$　より　$x = \tan y \cdots$①

$\Rightarrow$　$1 = \dfrac{1}{\cos^2 y} \times y' = (1 + \tan^2 y) \times y' = (1 + x^2) \times y'$　（①より）

$$\therefore\ y' = \frac{1}{x^2+1}$$

例題　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{2}$　　　　(2)　$y = \mathrm{Tan}^{-1}2x$

［解法＆解答］合成関数の微分を用いる。

(1)　$\{\mathrm{Sin}^{-1}u\}' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$　：最後に u' をかける（分子に書く）。

[解]　$$y' = \frac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}} \begin{array}{l}\times 2 \\ \times 2 = \sqrt{4}\end{array} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

(2)　$\{\mathrm{Tan}^{-1}u\}' = \dfrac{u'}{u^2+1}$　：最後に u' をかける（分子に書く）。

[解]　$$y' = \frac{2}{(2x)^2+1} = \frac{2}{4x^2+1}$$

問 4.8　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \mathrm{Sin}^{-1}3x$　　(2)　$y = \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{x}{3}$　　(3)　$y = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{3}$

6.4　演習

次頁に微分公式一覧をまとめています

問 4.9　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = (2x+3)^4$　　(2)　$y = (x^2-x+1)^3$　　(3)　$y = \dfrac{1}{\cos x}$

(4)　$y = \sqrt{1-x^2}$　　(5)　$y = \log(x^2-x+1)$　　(6)　$y = e^{x^2-x+1}$

(7)　$y = \cos(2x+3)$　　(8)　$y = \tan(2x+3)$　　(9)　$y = e^{2x}\cos 3x$

(10)　$y = \dfrac{e^{2x}}{\sin 3x}$　　(11)　$y = \{\log(2x+3)\}^6$　　(12)　$y = \cos^5 2x$

[Hint：(3)と(4)は，次頁一覧表の(1-1)と(1-2)を適用する]

＝＝

【まとめ：微分公式】

［微分の定義］　$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

［線　形　性］　$\{a\ f(x) + b\ g(x)\}' = a\ f'(x) + b\ g'(x)$

［積の微分］　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

［商の微分］　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

微分公式[基本]	微分公式[合成]	備　　考
(1)　$\{x^n\}' = n\ x^{n-1}$	$\{u^n\}' = n\ u^{n-1} \times u'$ （※$n = -1$ と $n = \dfrac{1}{2}$ は別公式として覚える）	(1-1)　$\left\{\dfrac{1}{u}\right\}' = -\dfrac{u'}{u^2}$ (1-2)　$\{\sqrt{u}\}' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
(2)　$\{\log x\}' = \dfrac{1}{x}$	$\{\log u\}' = \dfrac{u'}{u}$	(2-1)　$\{\log\|x\|\}' = \dfrac{1}{x}$ (2-2)　$\{\log_a x\}' = \dfrac{1}{x \log a}$
(3)　$\{e^x\}' = e^x$	$\{e^u\}' = u' e^u$	(3-1)　$\{a^x\}' = a^x \log a$
(4)　$\{\sin x\}' = \cos x$	$\{\sin u\}' = u' \cos u$	
(5)　$\{\cos x\}' = -\sin x$	$\{\cos u\}' = -u' \sin u$	
(6)　$\{\tan x\}' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\{\tan u\}' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	(6-1)　$\{\cot x\}' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
(7)　$\{\mathrm{Sin}^{-1} x\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\{\mathrm{Sin}^{-1} u\}' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	(7-1)　$\{\mathrm{Cos}^{-1} x\}' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
(8)　$\{\mathrm{Tan}^{-1} x\}' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$\{\mathrm{Tan}^{-1} u\}' = \dfrac{u'}{u^2+1}$	

＝＝