# §５　三角関数

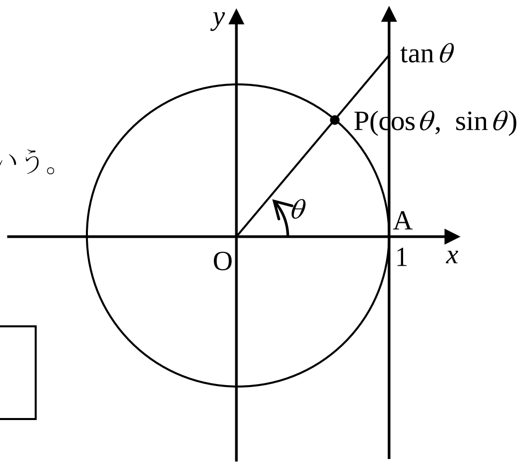
## 5.1　三角関数

復習です

三角関数に関する内容を復習しておきましょう。

○単位円[原点を中心とし半径が 1 の円： $x^2 + y^2 = 1$]において，
点 A(1, 0) とし，線分 OA を**始線**という。

○点 A から単位円の円周上を，
左回りを正方向として動く点 P
において，線分 OP を**動径**といい，
動径が動いた回転角 $\theta$ を**一般角**という。




○一般角 $\theta$ に対応する点 P の
$x$ 座標を $\cos\theta$ ,
$y$ 座標を $\sin\theta$　で表し，

［基本公式］(1)　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

と定める。

※三角関数の逆数を表す記号

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

２つ目の基本公式です。これには４つの顔がありましたね。

［基本公式］(2)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2-1)　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

(2-2)　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

(※ $\cos^2\theta$　で割る)

(2-3)　$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

(※ $\sin^2\theta$　で割る)

(2-4)　$1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

次は，重要な「三角関数の値」です。次の表は完成できますか？

［※解答は第 06 回の中にあります。］

演習

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | | | | | |
| $\cos\theta$ | | | | | |
| $\tan\theta$ | | | | | |

今度は，20 本の様々な公式です。覚えていますか？

□全く覚えてない(0%)　□少し覚えていた(25%)　□半分くらい(50%)

□殆ど覚えていた(75%)　□全部覚えていた(100%)

［加法定理(和)］源流の式です！

(01)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(02)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(03)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

［加法定理(差)］つなぎ目の符号を change しよう！

(04)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(05)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(06)　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

Type(Y)へ

Type (X) 加法定理(和)から

［2 倍角の公式］ $\alpha=\beta=\theta$ とおく。

(07)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

(08)　$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

(09)　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(08-1)　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

(※ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を適用)

(08-2)　$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

Type(Y) 加法定理(和)と(差)から

(a) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ ：(01)＋(04)

(b) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$ ：(01)－(04)

(c) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ ：(02)＋(05)

(d) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ ：(02)－(05)

［和を積に直す公式］(a)〜(c)を 2 で，(d)を $(-2)$ で割る。

(10) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(11) $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

(12) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(13) $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{-1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

［積を和に直す公式］変数変換を行う。

（※ $\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ とおくと $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$）

(14) $\sin A+\sin B=2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(15) $\sin A-\sin B=2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(16) $\cos A+\cos B=2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(17) $\cos A-\cos B=-2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

※後で使う

［半角の公式］ $\alpha=\beta=\dfrac{\theta}{2}$ とおく。[※ $\cos 0=1$]

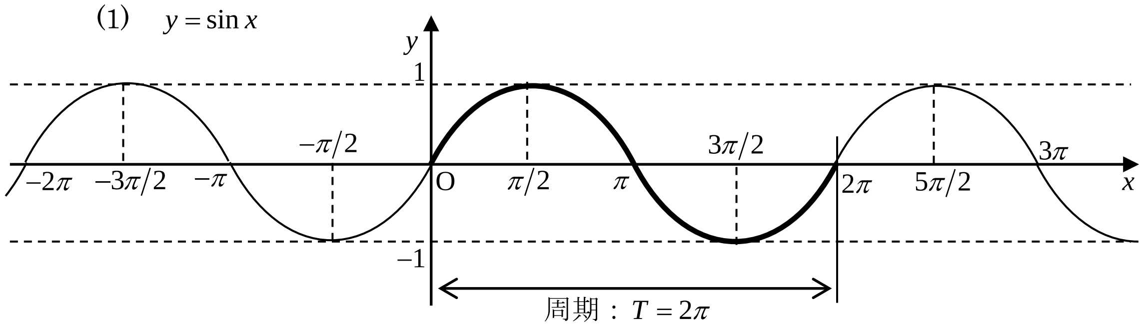
(18) $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$ ：(13)に代入

(19) $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ ：(12)に代入

(20) $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

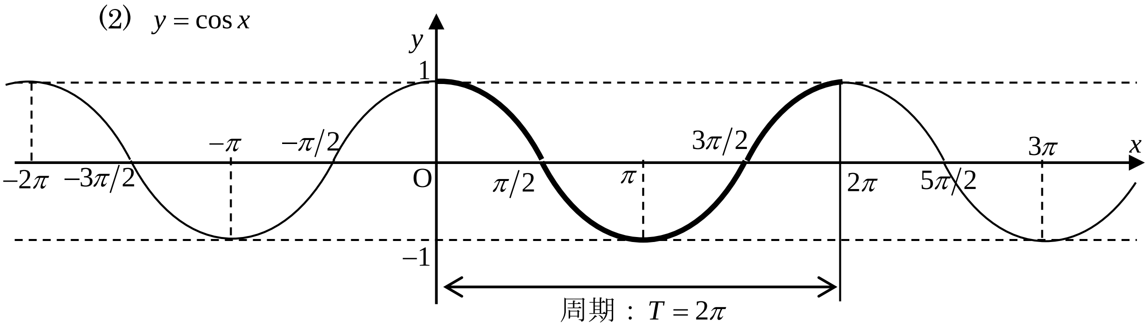
復習の最後は，三角関数のグラフです。

(1)　$y = \sin x$



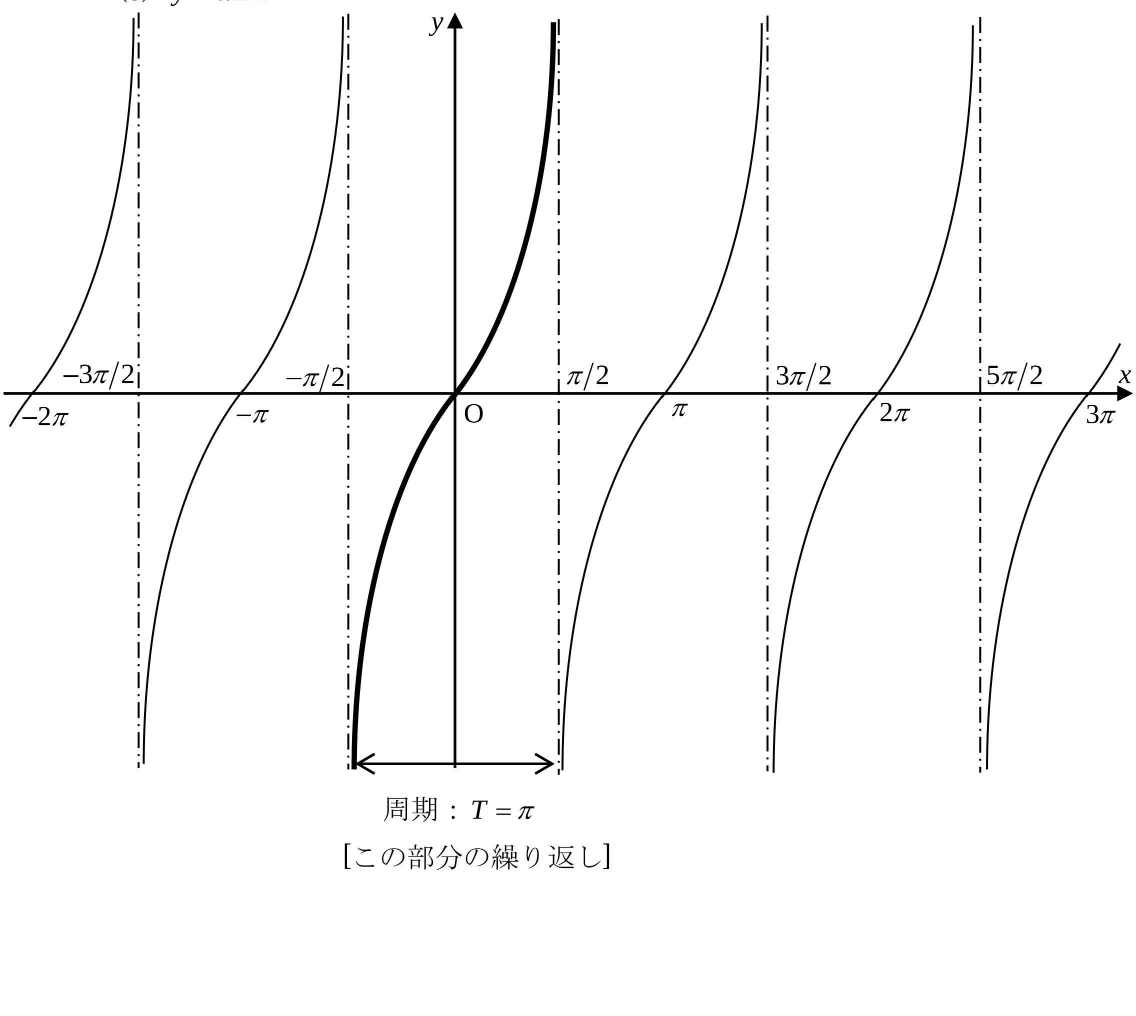

[この部分の繰り返し]

(2)　$y = \cos x$




[この部分の繰り返し]

(3)　$y = \tan x$




[この部分の繰り返し]

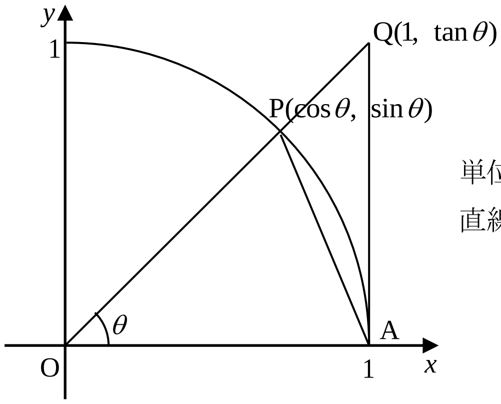
## 5.2　極限公式

どのような極限公式ですか？

ここでは，次の極限公式を取扱います。

［極限公式］　$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$　（収束）

証明）共通の角度$\theta$をもつ 3 つの図形の面積の大小関係を調べる。




単位円上の角度$\theta$に対応する点を P とし，
直線 OP と直線$x=1$との交点を Q とする。

(1) △OAP は，底辺１，高さ$\sin\theta$の三角形であるから

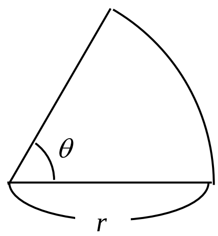
△OAP の面積$S_1$は　$S_1=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{2}$

(2) 扇型 OAP の面積$S_2$は　$S_2=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\theta=\dfrac{\theta}{2}$

［復習］半径$r$，中心角$\theta$の扇型について

①弧の長さ　$l=r\theta$　，

②面　　積　$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$




(3) △OAQ は，底辺１，高さ$\tan\theta$の三角形であるから

△OAQ の面積$S_3$は　$S_3=\dfrac{1}{2}\times 1\times\tan\theta=\dfrac{\tan\theta}{2}$

このとき，３つの面積の大小関係より

$$S_1\leqq S_2\leqq S_3\quad\Rightarrow\quad\frac{\sin\theta}{2}\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{\tan\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\quad\sin\theta\leqq\theta\leqq\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad\Rightarrow\quad 1\leqq\frac{\theta}{\sin\theta}\leqq\frac{1}{\cos\theta}$$

従って，極限をとると　$1 \leqq \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} \leqq \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos 0} = 1$

故に，「はさみうちの原理」より　$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$（収束）

※両端の極限値は共に 1，つまり 1 以上 1 以下の値は 1 しかないので
中央に挟まれている極限 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta}$ は 1 に収束している。
という論法を，**はさみうちの原理**と言います。

更に　$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left( \frac{\theta}{\sin\theta} \right)^{-1} = 1^{-1} = 1$（収束）　が導ける。

例題　次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta}$　(2) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$　(3) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}$

［注意点］　今回、適用する極限公式は,
「sin の中の角度」と「単独の角度」が
一致しているときに，1 に収束すると言っています。

例）$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \boxed{2\theta}}{\boxed{2\theta}} = 1$（収束）　$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \boxed{2\theta}}{\boxed{\theta}} = ?$

一致　不一致

［解答＆解説］

(1) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\boxed{ア}} \times \frac{\boxed{ア}}{\theta}$

：問題を 2 つに分け，$\boxed{ア}$ に極限公式が適用できる式を記入します
今回は,「sin の中の角度」 $2\theta$　が入ります。

［解］$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \boxed{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}} \times \frac{2\cancel{\theta}}{\cancel{\theta}} = \boxed{1} \times 2$

(2) 応用問題です。

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\boxed{ア}} \times \frac{\boxed{イ}}{\sin 3\theta} \times \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

：問題を 3 つに分け，$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ に極限公式が適用できる式を記入します

［解］$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{2\cancel{\theta}}{3\cancel{\theta}} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$（収束）

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta\cos\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}=1\times\frac{1}{\cos0}=1$ （収束）

※(3)は，次の極限公式も成り立つことを示唆しています。

［極限公式］ $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\tan\theta}=1$ （収束）

ちなみに， $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\cos\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\cos\theta}=1$ は成立ちません！！

**問 4.6** 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin3\theta}{2\theta}$　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\tan5\theta}{\sin3\theta}$　(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

[Hint：(3)は分母分子に $(1+\cos\theta)$ を掛ける]

## 5.3 三角関数の導関数

三角関数の導関数を求めます

次の微分公式が成り立ちます。[※今回分]

［微分公式］

(1) $(x^n)'=n\,x^{n-1}$

(2) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

(3) $(e^x)'=e^x$

(4) $(\sin x)'=\cos x$

(5) $(\cos x)'=-\sin x$

(6) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

証明）和を積に直す公式(15)と(17)を用います。

(4) $\displaystyle(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

このとき $\theta=\dfrac{h}{2}$ とおく。また，$h\to0$ のとき $\theta\to0$ であるから

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\cos(x+\theta)\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\ \cos(x+\theta)\times\frac{\sin\theta}{\theta}=\cos x\times1=\cos x$$

(5) $(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\dfrac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}}$$

このとき $\theta=\dfrac{h}{2}$ とおく。また，$h\to 0$ のとき $\theta\to 0$ であるから

$$= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(x+\theta)\sin\theta}{\theta} = -\lim_{\theta\to 0}\sin(x+\theta)\times\frac{\sin\theta}{\theta} = -\sin x\times 1 = -\sin x$$

(6) 商の微分を用いる。

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{(\sin\theta)'\times\cos\theta-\sin\theta\times(\cos\theta)'}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\times\cos\theta-\sin\theta\times(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

例題　次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin x\cos x$　　(2) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$　　(3) $y=\sin^2 x$

［解答］(1) $y' = \cos x\times\cos x+\sin x\times(-\sin x) = \cos^2 x-\sin^2 x$

(2) $y' = \dfrac{-\sin x\times\sin x-\cos x\times\cos x}{\sin^2 x}$

$$= \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

この問題は，次の公式の証明になります。

［公式］ $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

(3) $y=\sin^2 x=(\sin x)^2=u^2$ （$u=\sin x$）

よって，合成関数の微分より　$y' = 2uu' = 2\sin x\cos x$

**問 4.7**　次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\sin x$　　(2) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$　　(3) $y=\tan(2x+1)$

(4) $y=e^{\sin x}$　　(5) $y=\log|\cos x|$　　(6) $y=(1+\tan x)^3$