3.6　対数微分法

対数微分法とは？

直接，微分するのではなく，
対数（log）に直した後に，微分する方法を，**対数微分法**と言います。

例題　関数　$y = x^x$　（$x > 0$）…①　を微分せよ。

［解答］両辺に対数をとると

$$\log y = \log x^x$$

よって，対数の性質より

$$\log y = x \log x$$

両辺を，微分すると

$$\boxed{\frac{y'}{y}} = \boxed{1 \times \log x + x \times \frac{1}{x}}$$

［対数の性質］

（1）$\log PQ = \log P + \log Q$

（2）$\log \dfrac{P}{Q} = \log P - \log Q$

（3）$\log P^k = k \log P$

［積の微分］$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

［合成関数の微分］　$y = \log\{f(x)\}$　$\Rightarrow$　$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

故に　$\dfrac{y'}{y} = 1 + \log x$　より　$y' = (1 + \log x)\,\boxed{y}$

①より　$y = x^x$　であるから　$y' = (1 + \log x)\,\boxed{x^x}$

問 4.4　次の関数の導関数を，対数微分法を用いて求めよ。

（1）$y = (2x+1)^3(4x-1)^2$　　　（2）$y = \dfrac{(2x+1)^3}{(4x-1)^2}$

3.7　微分公式の拡張

微分公式の拡張とは？

対数微分法を用いて，次の微分公式を拡張します。

［微分公式］　$(x^n)' = n\,x^{n-1}$　（n は有理数）

⇩

［微分公式］　$(x^n)' = n\,x^{n-1}$　（n は実数）

証明）$y = x^n \cdots$①　とおく。

対数をとると　$\log y = \log x^n = n \log x$

微分すると　$\dfrac{y'}{y} = n \times \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = n \times \dfrac{y}{x} = n \times \dfrac{x^n}{x} = n\,x^{n-1}$

＝＝

【補足：公式の追加】

［微分公式］　$(x^n)' = n\,x^{n-1}$　において，①　$n = -1$　の場合と　②　$n = \dfrac{1}{2}$　の場合は、

微分計算に慣れてきたら，別公式として覚える。(⇒微分_第 06 回の最終頁参照)

［微分公式］　①　$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$　　②　$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

証明）①　$n = -1$　のとき　$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)\;x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

②　$n = \dfrac{1}{2}$　のとき　$\left(\sqrt{x}\right)' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

次のような複雑な微分計算を短くすることができます。

（※微分計算に慣れてきてから，読み返してください。）

［問題］　関数　$y = \log|x + \sqrt{x^2+1}|$　を微分せよ。

［解答］　$y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(1 + \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$　［※合成関数の場合は　$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{\boxed{u'}}{2\sqrt{u}}$ ］

$$= \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})} \times \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

＝＝

§ 4　指数関数

4.1　指数関数

復習です

指数に関する内容を復習しておきましょう。

［名称］　$y = \boxed{a}^{\boxed{x}}$ ← 指数

底（a は 1 ではない正の数）

［公式(数値)］　(1)　$a^0 = 1$

［指数法則］　(2)　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

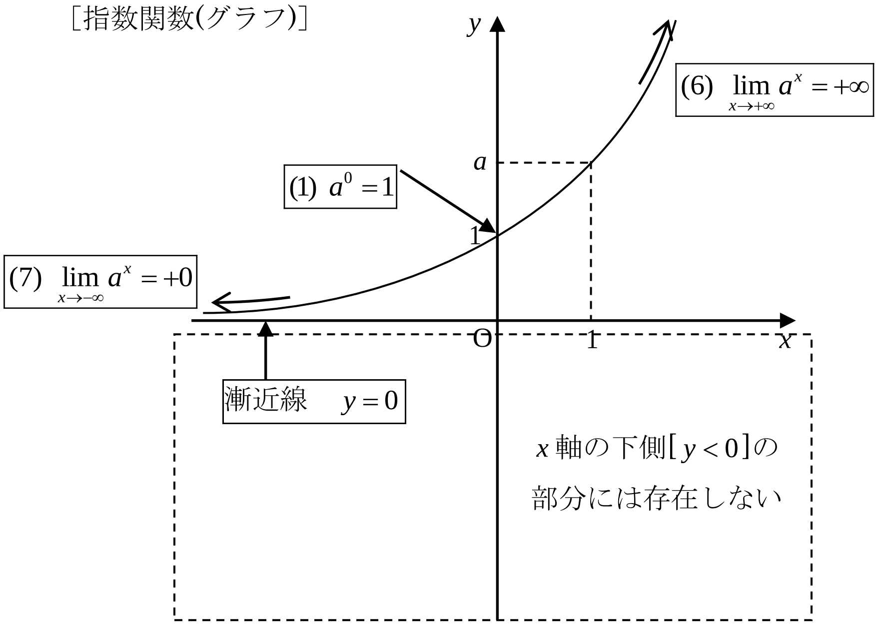
(3)　$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(4)　$(a^m)^n = a^{mn}$

(5)　$(ab)^m = a^m b^m$

x

［指数関数(グラフ)］



［極限］　(6)　$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$　　(7)　$\lim_{x \to -\infty} a^x = +0$

4.2　指数関数の導関数

指数関数の導関数を求めます

次の微分公式が成り立ちます。

［微分公式］　$(e^x)' = e^x$

証明）対数微分法を用います。

$y = e^x$　…①

両辺に対数をとると

$\log y = \log e^x$

$\log y = x \log e$　：対数の性質　$\log P^k = k \log P$

$\log y = x$　：対数の公式(数値)　$\log_a a = 1$

両辺を微分する

$\dfrac{y'}{y} = 1$　$\therefore y' = \boxed{y}$

よって，①より　$y' = \boxed{e^x}$

4.3　一般の場合(応用)

一般の場合を紹介します。

1）底がネイピアの数 e の場合

［微分公式］　(2)　$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$　　(3)　$(e^x)' = e^x$

2）一般の場合

［微分公式］　(2)　$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$　　(3)　$(a^x)' = a^x \log a$

[※特に $a = e$ のときは　$\log e = \log_e e = 1$　より表記されない]

証明）(3)　対数微分を用います。

$y = a^x \quad \Rightarrow \quad \log y = \log a^x = x \log a$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y'}{y} = \log a \qquad \therefore y' = y \log a = a^x \log a$

4.4　例題

例題　次の関数を微分せよ。[※下の【参考：合成関数の微分】も読んでください]

(1) $y=e^{-x}$　　(2) $y=e^{x^2}$　　(3) $y=3^x$

(4) $y=e^x\log x$　　(5) $y=\dfrac{e^x}{x+1}$

［解答］(1) $y=e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y'=(-1)\times e^{-x}=-e^{-x}$

(2) $y=e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y'=2xe^{x^2}$

(3) $y=3^x \quad \Rightarrow \quad y'=3^x\log 3$

(4) $y=e^x\log x \quad \Rightarrow \quad y'=e^x\times\log x+e^x\times\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{1}{x}+\log x\right)e^x$

(5) $y=\dfrac{e^x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad y'=\dfrac{e^x\times(x+1)-e^x\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

問 4.5　次の関数を微分せよ。

(1) $y=3^{2x+1}$　　(2) $y=e^{x^2-3x-2}$　　(3) $y=(x-1)e^{3x}$

(4) $y=\dfrac{\log x}{e^x}$　　(5) $y=(e^x+e^{-x})^2$

＝＝

【参考：合成関数の微分】

通常の微分　(1) $y=x^n \quad \Rightarrow \quad y'=n\,x^{n-1}$

(2) $y=\log x \quad \Rightarrow \quad y'=\dfrac{1}{x}$　　：逆数にする

(3) $y=e^x \quad \Rightarrow \quad y'=e^x$　　：変化しない

合成関数の微分

(1) $y=\{f(x)\}^n \quad \Rightarrow \quad y'=n\,\{f(x)\}^{n-1}\times\boxed{f'(x)}$

(2) $y=\log f(x) \quad \Rightarrow \quad y'=\dfrac{\boxed{f'(x)}}{f(x)}$　　※重要

(3) $y=e^{f(x)} \quad \Rightarrow \quad y'=\boxed{f'(x)}\,e^{f(x)}$

※(2)対数関数の場合は，分子に微分 $f'(x)$ を書きかましたが，
(3)指数関数の場合は，先頭に微分 $f'(x)$ を書くと，
計算標記の短縮化になります。

＝＝