§３　対数関数

3.1　ネイピアの数

ネイピアの数とは？

次の関数の極限値を**ネイピアの数**と言います。

［ネイピアの数］　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

ネイピアの数は，円周率 $\pi(\fallingdotseq 3.14)$ と同様に， $e(\fallingdotseq 2.71)$ である実数です。
３年生で学習する「マクローリン展開」を適用すると，
次の等式を導くことができます。

［e の値］　$\displaystyle e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$

3.2　性質

ネイピアの数に関する性質を紹介します

まず，次の等式が成り立ちます。

［性質①］　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

証明）$x=-(X+1)$　$[\Rightarrow \quad X=-x-1]$ とおくと

$x\to-\infty$　のとき　$X\to+\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{X\to+\infty}\left(1-\frac{1}{X+1}\right)^{-(X+1)}=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{X}{X+1}\right)^{-(X+1)}$

$$=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{X+1}{X}\right)^{X+1}=\lim_{X\to+\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^{X+1}=\lim_{X\to+\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)\boxed{\left(1+\frac{1}{X}\right)^X}$$

$$=\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)\times e=e$$

更に，次の等式も成り立ちます。

［性質②］　$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

証明）$x=\dfrac{1}{X}$　$[\Rightarrow X=\dfrac{1}{x}]$ とおくと

$x\to+0$ のとき　$X\to+\infty$（$x\to-0$ のとき　$X\to-\infty$）

右極限　$\displaystyle\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to+\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^X=e$

左極限　$\displaystyle\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to-\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^X=e$

よって，①共に値があり，②同じ値であるから

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ （収束）

3.3　自然対数

自然対数とは？

まずは復習から。

真数（正の値[真数条件]）

［対数記号］　$y=\log_{\boxed{a}}\boxed{x}$

底（1 ではない正の値）

底が 10 である対数を**常用対数**といい，
底が e である対数を**自然対数**という。
※このため，ネイピアの数 e は**自然対数の底**とも呼ばれます。

【注意】１）自然対数 $\log_e x$ は，底を省略して表記する。

$y=\log_e x=\log x$

２）数学以外の分野では，通常 $\log x$ は「常用対数」を意味し，
「自然対数」は $\ln x$ で表します。

（※ ln は natural logarithm の頭文字）

3.4　対数関数

復習です

対数に関する内容を復習しておきましょう。

［公式(数値)］　(1)　$\log_a 1 = 0$　　　(2)　$\log_a a = 1$

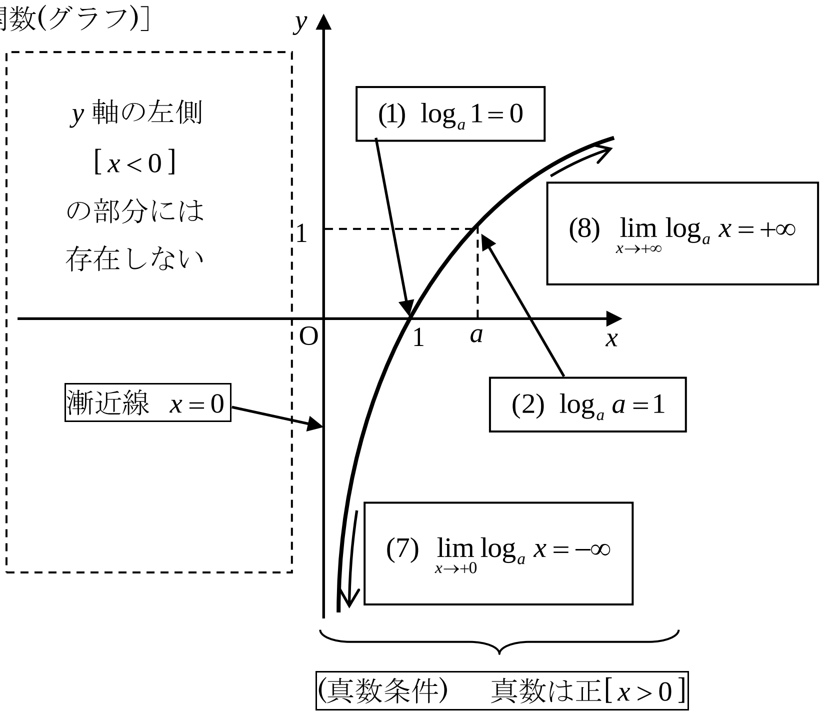
［公式(性質)］　(3)　$\log_a PQ = \log_a P + \log_a Q$

(4)　$\log_a \dfrac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

(5)　$\log_a P^k = k \log_a P$

［底の変換公式］　(6)　$\log_a P = \dfrac{\log_b P}{\log_b a}$

［対数関数(グラフ)］



［極限］　(7)　$\lim_{x \to +0} \log_a x = -\infty$　　　(8)　$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

3.5　対数関数の導関数

対数関数の導関数を求めます

次の微分公式が成り立ちます。

［微分公式］　$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

証明）$(\log x)' = \lim_{h \to 0} \dfrac{\log(x+h) - \log x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \log\left(\dfrac{x+h}{x}\right)$　　［公式］(4)　$\log_a P - \log_a Q = \log_a \dfrac{P}{Q}$

$= \dfrac{1}{\boxed{x}} \lim_{h \to 0} \dfrac{\boxed{x}}{h} \log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$

$= \dfrac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$　　［公式］(5)　$k \log_a P = \log_a P^k$

いま　$t = \dfrac{h}{x}$　$\left(\Rightarrow \dfrac{1}{t} = \dfrac{x}{h}\right)$　とおく。
このとき，$h \to 0$　のとき　$t \to 0$　であることに注意する

$= \dfrac{1}{x} \lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}}$

$= \dfrac{1}{x} \log e$　　［性質②］　$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$= \dfrac{1}{x}$　　［公式］(2)　$\log_a a = 1$

【注意】

(1) 一般の場合　［微分公式］　$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$

証明）底の変換公式より

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{(\log x)'}{\log a} = \frac{1}{x \log a}$$

(2) 真数が絶対値の場合　［微分公式］　$(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

証明） $|x| = \begin{cases} x & x>0 \text{ のとき} \\ -x & x<0 \text{ のとき} \end{cases}$ より

[※対数のとき， $x=0$ は起こらない]

ⅰ） $x>0$ のとき $(\log|x|)' = (\log x)' = \dfrac{1}{x}$

ⅱ） $x<0$ のとき

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}$$

※合成関数の微分

$$x \quad \rightarrow \quad u=-x \quad \rightarrow \quad y = \log u = \log(-x)$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{-x}$$

3.6 例題

例題　次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log x$　　(2) $y = \log|x|$　　(3) $y = \log_2 x$

(4) $y = x\log x$　　(5) $y = \dfrac{\log x}{x}$　　(6) $y = \log(2x+1)$

［解答及び解説］

(1) $y = \log x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x}$　：対数の微分は「逆数」になると覚えましょう。

(2) $y = \log|x| \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x}$　：絶対値の場合も微分操作に影響はありません。

(3) $y = \log_2 x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x\log 2}$

：底が省略されているときは自然対数(底が e の対数関数)です。
底が明記されてあるときは，分母に $\log a$ が加わります。
(※尚，自然対数の場合 $\log e = 1$ なので表記されません)

(4) 積の微分 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を適用します。

$$y = x\log x \quad \Rightarrow \quad y' = 1\times\log x + x\times\frac{1}{x} = \log x + 1$$

(5) 商の微分 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ を適用します。

$$y = \frac{\log x}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\frac{1}{x}\times x - (\log x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

(6) 合成関数の微分 [最後に u' を掛けることが Point です！！]

$$y = \log(2x+1) = \log u \quad （u = 2x+1）$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{u}\times \boxed{u'} = \frac{1}{2x+1}\times \boxed{2} = \frac{2}{2x+1}$$

[※省略できるように努力する！]

$$y = \log(2x+1) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2x+1}\times 2 = \frac{2}{2x+1}$$

【復習】 微分_第２回より

$$y = (2x-1)^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 3(2x-1)^2 \times 2 = 6(2x-1)^2$$

$$[\, y = u^3 \;（u = 2x-1） \quad \Rightarrow \quad y' = 3u^2 \times u' \,]$$

問 4.3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log(3x+5)$ (2) $y = \log(x^2 + x - 1)$ (3) $y = \log|4x-3|$

(4) $y = \log_3|7x+4|$ (5) $y = x^2\log(2x+1)$ (6) $y = (2x+1)^2\log x$

(7) $y = \dfrac{\log(3x-2)}{x^2}$ (8) $y = (1+\log x)^3$

＝＝

【参考】対数関数の合成関数の微分について

$$y = \log\{f(x)\} = \log u \;（u = f(x)） \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{u}\times u' = \frac{u'}{u} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

このことは，今回の TEXT の中で触れていますね。

今後は，計算表記の短縮化として，次の様に操作します。

$\boxed{y = \log\{f(x)\} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}}$ ：真数を逆数にし，微分を分子とする

＝＝＝