§２　微分公式

2.1　微分公式

微分公式を紹介していきます

我々は，次の「**微分の定義**」から，「**微分公式**」を導いていきます。

［微分の定義］　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

極限_第 10 回では，「**線形性**」を導きました。

［線形性］　$\{p\ f(x)+q\ g(x)\}'=p\ f'(x)+q\ g'(x)$　（p，q は定数）

また，「**積の微分**」と「**商の微分**」という性質が成り立ちます。

［積の微分］　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

［商の微分］　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

証明）「商の微分」の証明は，極限_第 11 回で行っていますので，
ここでは，「積の微分」の証明だけ行います。

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\boxed{-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}-f(x)g(x)}{h}$$

［※同じものを引いて足しています］

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)\}+\{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\times g(x+h)+f(x)\times\boxed{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}\right]$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【参考】公式は覚えてください。もう呪文ですね。

［積の微分］「前微分，後そのまま　足す　前そのまま，後微分」

［商の微分］「下２乗」「上微分，下そのまま　引く　上そのまま，下微分」

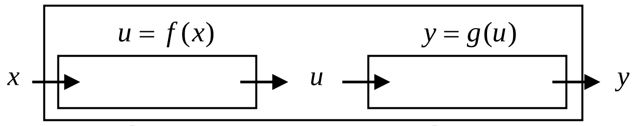
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

更に，極限_第12回では，「合成関数の微分」を証明しました。

［合成関数の微分］　$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))\,f'(x)$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \right)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



各微分：　$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$　　$\dfrac{dy}{du} = g'(u)$

合成関数の微分：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx} = g'(u)\,f'(x) = g'(f(x))\,f'(x)$

以上が，「**微分の性質**」に関する公式です。
今後は，次の「**初等関数**」と言われる各関数の「**微分公式**」を導きます。

［初等関数］　代数関数(整式，分数式，無理式)
指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数
[※これらの合成関数も初等関数となります]

つまり，１年生で学習した基本的な関数の微分公式を導きます。

既に，導いている微分公式（極限_第10回～第12回を参照）を
確認しておきましょう。

［微分公式］　(1)　$\{x^n\}' = n\,x^{n-1}$　（n は有理数）

2.2　例題

例題　次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 2x + 4$　　(2) $y = \dfrac{1}{x^3}$

(3) $y = \sqrt{x}$　　(4) $y = (2x-1)^3$

(5) $y = (3x+4)(2x-1)^3$　　(6) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-2x+2}$

［解答］(1) $y = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 2x + 4$

$$y' = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 2$$

(2) $y = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$

［指数の拡張］ $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$

$$y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

(3) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[指数の拡張] $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

(4) $y = (2x-1)^3 = u^3$　（$u = 2x-1$）

$$y' \boxed{= 3u^2u'} = 3(2x-1)^2 \times 2 = 6(2x-1)^2$$

[※この部分は省略：u を使わず合成関数の微分ができるようになろう！]

(5) [New]積の微分を用います。

$y = (3x+4)(2x-1)^3$　[$f(x) = (3x+4),\ g(x) = (2x-1)^3$]

$$\begin{aligned} y' &= 3 \times (2x-1)^3 + (3x+4) \times \{3(2x-1)^2 \times 2\} \\ &= 3(2x-1)^3 + 6(3x+4)(2x-1)^2 \\ &= 3\{(2x-1) + 2(3x+4)\}(2x-1)^2 \quad \text{：共通因数でくくる} \\ &= 3(8x+7)(2x-1)^2 \end{aligned}$$

(6) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-2x+2}$　：商の微分

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3 \times (x^2-2x+2) - (3x-1) \times (2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{(3x^2-6x+6) - (6x^2-6x-2x+2)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{-3x^2+2x+4}{(x^2-2x+2)^2} \end{aligned}$$

問 4. 2　次の関数を微分せよ。

（1） $y = x^5$　　（2） $y = 3x^2 - 5x + 4$

（3） $y = \dfrac{2}{x}$　　（4） $y = \dfrac{1}{3x^6}$

（5） $y = \sqrt[3]{x^4}$　　（6） $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{x} + 5\sqrt[5]{x}$

（7） $y = (x^2 - 3x + 5)^3$　　（8） $y = \dfrac{1}{(4x-7)^6}$

（9） $y = \sqrt[3]{3x+5}$　　（10） $y = \dfrac{2}{x+1}$

（11） $y = \dfrac{4x+3}{x-2}$　　（12） $y = x^3(x-1)^4$

＝＝＝

【研究】積の微分について

[テーマ①]「積の微分」と「合成関数の微分」を混同しないように！

積の微分　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$　［正］

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x) \times g'(x)$　［誤］

【参考】合成関数の微分　$\{g(f(x))\}' = g'(f(x)) \times f'(x)$

[テーマ②] 関数　$y = (x+1)(x-2)$　を微分する、

展開して微分する　$y = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$

$y' = 2x - 1$ ← 当然、同じ結果

微分して展開する　$y = (x+1)(x-2)$

$y' = 1 \times (x-2) + (x+1) \times 1 = x - 2 + x + 1 = 2x - 1$

やはり、積の微分は　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$　［正］

[テーマ③]「積の微分」から「商の微分」を導こう。

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = [f(x)\{g(x)\}^{-1}]'$$

$$= f'(x) \times \{g(x)\}^{-1} + f(x) \times [(-1)\{g(x)\}^{-2} \times g'(x)]$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

やはり、積の微分は　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$　［正］

＝＝＝