§４　諸定理

4.1　区間

区間とは？

変数が動く範囲を，**区間**と言います。
特に，関数 $y = f(x)$ において，

独立変数(x)が動く範囲を，**定義域**と言い，
従属変数(y)が取りうる範囲を，**値域**と言います。

ここでは，変数(記号 x を使用)が動く範囲(＝区間)を
表す記号を紹介します。

	区　　間	記　　号
①	$a < x < b$	$(a,\ b)$
②	$a \leqq x < b$	$[a,\ b)$
③	$a < x \leqq b$	$(a,\ b]$
④	$a \leqq x \leqq b$	$[a,\ b]$

※等号がないときは，記号(丸括弧) を使用し，
　等号があるときは，記号[鉤括弧] を使用します。
※①の様に両端とも等号がない区間を，**開区間**といい，
　④の様に両端とも等号がある区間を，**閉区間**と言います。

	区　　間	記　　号
⑤	$x > a$	$(a,\ +\infty)$
⑥	$x \geqq a$	$[a,\ +\infty)$
⑦	$x < a$	$(-\infty,\ a)$
⑧	$x \leqq a$	$(-\infty,\ a]$

※無限大(∞)の記号には，必ず記号(丸括弧) を使用。

実数全体は，次の様に表します。

	区　　間	記　　号
⑨	$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty,\ +\infty)$

※無限大(∞)の記号には，等号は使用しません。

4.2　ロル(Rolle)の定理

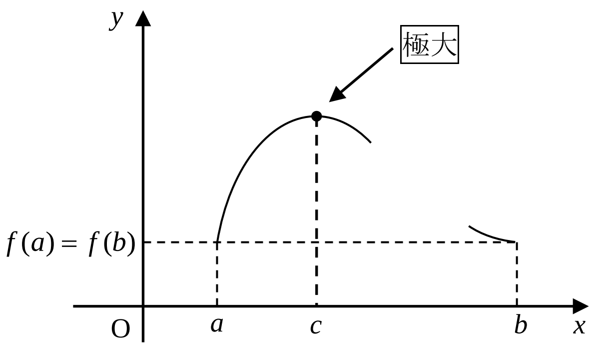
ロルの定理とは？

次の性質を，**ロルの定理**と言います。

［ロルの定理］
関数　$y=f(x)$　が　①閉区間　$a \leqq x \leqq b$　で連続
②開区間　$a<x<b$　で微分可能
③ $f(a)=f(b)$ ［両端の値が同じ］
であるとき，次を満たす c が少なくとも 1 つは存在する。
$f'(c)=0$　（但し　$a<c<b$）

説明）③より，両端の値が同じであるから
最初，単調増加(↗)した場合は，どこかで単調減少(↘)となる。
つまり，極大となる点 $x=c$ が存在する。
よって，極値となるところでは　$f'(c)=0$　が成り立つ。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$		b
y'		$+$	0	$-$		
y	$f(a)$	↗	$f(c)$ 極大	↘		$f(b)$



③より，両端の値が同じであるから
最初，単調減少(↘)した場合は，どこかで単調増加(↗)となる。
つまり，極小となる点 $x=c$ が存在する。
よって，極値となるところでは　$f'(c)=0$　が成り立つ。

4.3　コーシー(Cauchy)の平均値定理

コーシーの平均値定理とは？

次の性質を，**コーシーの平均値定理**と言います。

［コーシーの平均値定理］
２つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が
①閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続
②開区間 $a < x < b$ で微分可能
であるとき，次を満たす c が少なくとも１つは存在する。

$$\{f(b)-f(a)\}g'(c)=\{g(b)-g(a)\}f'(c) \quad （但し\quad a<c<b）$$

証明）まず

$$h(x)=\{f(b)-f(a)\}g(x)-\{g(b)-g(a)\}f(x)$$

とおくと，条件より $h(x)$ は
①閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続
②開区間 $a < x < b$ で微分可能
を満足する。更に

$$\begin{aligned}h(a)&=\{f(b)-f(a)\}g(a)-\{g(b)-g(a)\}f(a)\\&=f(b)g(a)-f(a)g(a)-g(b)f(a)+g(a)f(a)\\&=f(b)g(a)-f(a)g(b)\\h(b)&=\{f(b)-f(a)\}g(b)-\{g(b)-g(a)\}f(b)\\&=f(b)g(b)-f(a)g(b)-g(b)f(b)+g(a)f(b)\\&=f(b)g(a)-f(a)g(b)\end{aligned}$$

より　③ $h(a)=h(b)$ ［両端の値が同じ］

よって，ロルの定理より，
次を満たす c が少なくとも１つは存在する。

$$h'(c)=0 \quad （但し\quad a<c<b）$$

ところで，$h(x)=\{f(b)-f(a)\}g(x)-\{g(b)-g(a)\}f(x)$　より

$$h'(x)=\{f(b)-f(a)\}g'(x)-\{g(b)-g(a)\}f'(x)$$

故に，$x=c$ を代入すると

$$h'(c)=\{f(b)-f(a)\}g'(c)-\{g(b)-g(a)\}f'(c)$$

従って，$h'(c)=0$ より

$$0=\{f(b)-f(a)\}g'(c)-\{g(b)-g(a)\}f'(c)$$

$$\therefore \{f(b)-f(a)\}g'(c)=\{g(b)-g(a)\}f'(c)$$

4.4　平均値の定理

平均値の定理とは？

コーシーの平均値定理において，
特に，$g(x)=x$ の場合を，単に**平均値の定理**といいます。

［平均値の定理］
関数 $y=f(x)$ が ①閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続
②開区間 $a<x<b$ で微分可能
であるとき，次を満たす c が少なくとも 1 つは存在する。

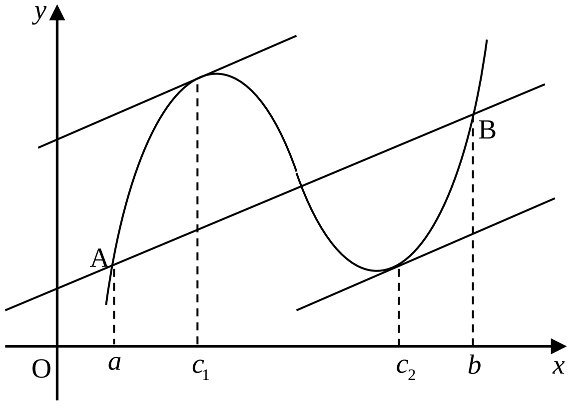
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad （但し\quad a<c<b）$$

説明）$g(x)=x$ より $g'(x)=1$
よって $g(a)=a,\ g(b)=b,\ g'(c)=1$
これらの結果を，コーシーの平均値定理に代入すると

$$\{f(b)-f(a)\}\times 1=(b-a)\times f'(c)$$

$$\therefore\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

【幾何的な意味】
○左辺の微分係数 $f'(c)$ は，曲線上の $x=c$ における
接線の傾きである。
○右辺の平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は，
２点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きである
○つまり，「平均値の定理」は「直線 AB」と「平行」な
「接線」が少なくとも 1 つ存在することを意味する。



4.5　ロピタル(l'Hospital)の定理

ロピタルの定理とは？

次の性質をロピタルの定理と言います。

［ロピタルの定理］
２つの関数　$f(x),\ g(x)$　において
①　$f(a)=g(a)=0$
とする。また，点 $x=a$ を内部に含むある区間 I で
②　$f(x),\ g(x)$ は微分可能とする。
③特に，　$g(x)$ は $g'(x)\neq 0$　とする。
このとき，次の命題が成り立つ

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ （収束）\quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\ （収束）$$

説明）点 $x=a$ とは異なる区間 I の内部の点 $x=b$ を取り出す。
今回は，　$a<b$ の場合についてのみ説明する。
微分_第１回で述べていますが、次の関係が成り立ちます。

［性質］　微分可能　⇒　連続

つまり，２つの関数 $f(x),\ g(x)$ は
①　閉区間　$a\leqq x\leqq b$　で連続
②　開区間　$a<x<b$　で連続
よって，コーシーの平均値定理より，
次を満たす c が少なくとも１つは存在します。

$$\{f(b)-f(a)\}g'(c)=\{g(b)-g(a)\}f'(c)\qquad (a<c<b)$$

条件より　$f(a)=g(a)=0,\ g'(c)\neq 0$　であるから

$$f(b)g'(c)=g(b)f'(c)\qquad \therefore\ f(b)=\frac{g(b)f'(c)}{g'(c)}$$

故に，$b\to a$　のとき，$c\to a$　であるから，結論を導くことができる

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)}{g(b)}=\lim_{b\to a}\frac{\cancel{g(b)}f'(c)}{g'(c)\cancel{g(b)}}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A\ （収束）$$

※ロピタルの定理は，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{0}{0}$ の不定形の場合だけでなく

不定形 $\dfrac{\infty}{\infty}$ の場合もできる。

※また，$x\to a$ の場合だけでなく，$x\to\infty$ の場合も適用できる。

［不定形(復習)］　不定形には，次の 4 つの型がある。

① $\dfrac{0}{0}$　② $\dfrac{\infty}{\infty}$　③ $0\times\infty$　④ $\infty-\infty$

＝＝

【ロピタルの定理】　ロピタルの定理は，微分を利用した簡便な極限計算です。

［ロピタルの定理］　使用条件：$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ or $\dfrac{\infty}{\infty}$ のとき

計算方法：$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$　[分母と分子を別々に微分する]

例 1）極限値 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}$ を求めよ。$\left(=\dfrac{0}{0}\ \text{の場合}\right)$

[従　　来]　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+5}=\dfrac{-1}{6}$

微分

[ロピタル]　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\boxed{x^2-3x+2}}{\boxed{x^2+4x-5}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\boxed{2x-3}}{\boxed{2x+4}}=\dfrac{-1}{6}$

微分

例 2）極限値 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}$ を求めよ。$\left(=\dfrac{\infty}{\infty}\ \text{の場合}\right)$

[従　　来]　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}=\dfrac{1-0+0}{1+0-0}=1$

[ロピタル]　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{2x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

[※不定形の場合は，何回でも使用できる]

＝＝

例題　次の極限を，ロピタルの定理を用いて求めよ。

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+5x-6}$　　(2) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x-2}$

(3) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$　　(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$

［解答］ (1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x+5}=\dfrac{4}{7}$ （収束）

※分子は因数分解できますか？

[組立除法を使用：微分の応用_第 09 回を参照]

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)^2}{\cancel{(x-1)}(x+6)}=\frac{4}{7}$$ （収束）

(2) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x-2}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{4x-3}{6x+1}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ （収束）

※文字 x がある間は 極限記号 lim が必要ですが，

文字 x が無くなった場合は，lim も必要なくなります。

(3) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2+x+1}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{2x+1}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{6x}{2}=\lim_{x\to +\infty}3x=+\infty$ （発散）

※不定形 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の場合は，連続してロピタルの定理が使えますが，

そうでないときは，x に極限内容(今回は $+\infty$)を代入します。

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x}{1}=\lim_{x\to 0}(2\cos 2x)=2\cos 0=2$ （収束）

※［公式：微分_第 05 回参照］ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

を適用した場合の解答

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=1\times 2=2$$

問 5.5　次の極限を，ロピタルの定理を用いて求めよ。

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^3-4x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-x-4}$　　(2) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{4x+3}{x^2-x+1}$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$　　(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$　　(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(6) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\log x}{x}$　　(7) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$