第４章　微分

§１　微分

1.1　左極限と右極限

左極限，右極限とは？

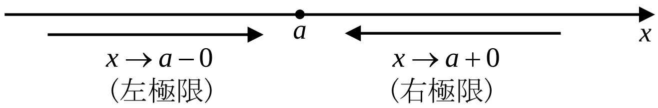
しばらく，極限の話に戻ります。

$x=a$ に近づく方法は,

　$x=a$ の左側から近づく，**左極限**（記号：$x \to a-0$）

　$x=a$ の右側から近づく，**右極限**（記号：$x \to a+0$）

の２つがあります。



【注意】$a=0$ の場合は　単に次のように表記する。
　（左極限）$x \to -0$　　（右極限）$x \to +0$

左極限と右極限の値が，①共に存在し，②同じ値であるとき，
極限が存在するといい，その値を**極限値**と言う。
[※①と②の両方の条件を満たさないとき，極限は存在しない]

1.2　連続関数

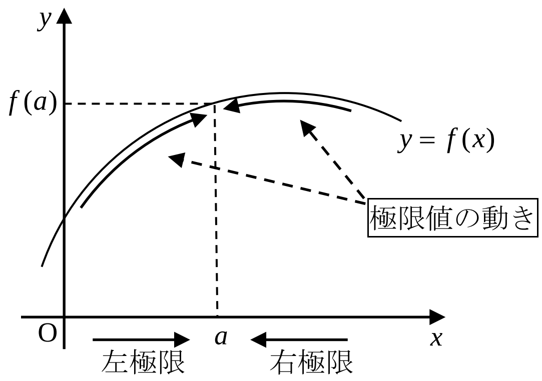
連続とは？

関数 $f(x)$ が $x=a$ で**連続**とは，関数 $f(x)$ が表すグラフが $x=a$ で
つながっている状態をいいます。
これを，数学の式で表すと，次の様に表現することができます。

［連続］　関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続

$$\Leftrightarrow \quad f(a)=\lim_{x \to a} f(x)$$

関数 $f(x)$ が定義される区間 I の全ての点 x で連続なとき，
関数 $f(x)$ は区間 I で**連続**と言い，$f(x)$ を**連続関数**と言う。



左極限　$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$

右極限　$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$

①それぞれに極限値あり

②それぞれ同じ値

よって，単に　$\lim\limits_{x \to \boxed{a}} f(x) = \boxed{f(a)}$　と表記できる。

［±0 が取れる］　　　[一致した値]

1.3　不連続

不連続とは？

関数 $f(x)$ が $x = a$ で**不連続**とは，関数 $f(x)$ が表すグラフが $x = a$ で切断されている状態をいいます。

例１）階段関数　$y = [x]$

※記号の説明　ガウス(Gauss)記号 $[x]$ は，
x を超えない最大の整数を意味します。
$[1] = 1$，　$[1.5] = 1$，　$[-1] = -1$，$[-1.5] = -2$

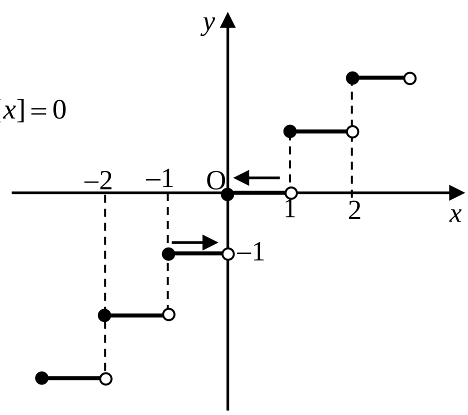
$x = 0$ において

(左極限)　$\lim\limits_{x \to -0} [x] = -1$　　(右極限)　$\lim\limits_{x \to +0} [x] = 0$

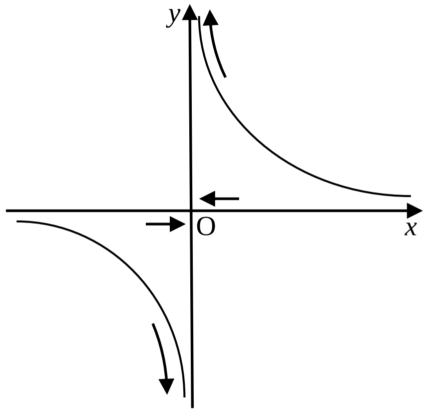
①それぞれに極限値あり

しかし，②異なる値

よって　$\lim\limits_{x \to 0} [x]$　は極限値なし(発散)



例２）分数関数(その１)　　$y=\dfrac{1}{x}$



$x=0$ において

(左極限)　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=\frac{1}{-0}=-\infty$

(右極限)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\frac{1}{+0}=+\infty$

①極限はともに発散

しかも，②異なる値(概念)

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$　は極限値なし(発散)

【極限の復習：重要公式】

(1)　$\dfrac{1}{+\infty}=+0$　　　(2)　$\dfrac{1}{-\infty}=-0$

(3)　$\dfrac{1}{+0}=+\infty$　　　(4)　$\dfrac{1}{-\infty}=-0$

［※極限_第 08 回(４頁)の形式的な計算方法を参照］

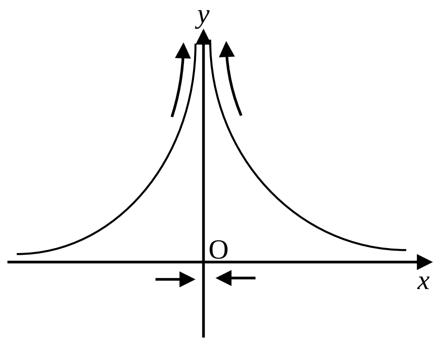
例３）分数関数（その２）　　$y=\dfrac{1}{x^2}$

$x=0$ において

同じ結果　しかし　値ではない！

(左極限)　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$

(右極限)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(+0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$



①②極限はともに正の無限大に発散

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$　(発散)

○収束する場合　　①値である　②同じ結果

○収束しない場合（今回は　$x=0$　で不連続）

例１）①値である　②異なる結果

例２）①値でない　②異なる結果

例３）①値でない　②同じ結果

$\left.\right\}$ 不連続である

1.4　微分

微分とは？

極限_第 10 回以降からの内容を，少し復習する形で行います。

関数 $f(x)$ において，次の極限値が存在するとき，
関数 $f(x)$ は， $x=a$ で**微分可能**と言い，極限値を**微分係数**と言う。

［微分係数］　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

関数 $f(x)$ が定義される区間 I 上の全ての点 x で微分可能なとき
関数 $f(x)$ は，区間 I で**微分可能**と言い，
次の極限計算で求められる関数を，**導関数**と言う。
また，導関数を求めることを**微分**すると言う。

［微分の定義］　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1.5　微分と連続

微分と連続の間の関係を紹介します

次の関係が成り立ちます。

［性質］　$f(x)$ が $x=a$ で微分可能
　　$\Rightarrow$　$f(x)$ が $x=a$ で連続

※この逆は不成立です。
逆）$f(x)$ が $x=a$ で連続
　　$\Rightarrow$　$f(x)$ が $x=a$ で微分可能　[偽]
反例を，次の項目で取り上げます。

証明） $f(x)$ が $x=a$ で微分可能

$$\Rightarrow \quad \text{極限値} \quad f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{が存在}$$

いま，$x=a+h$ （$\Rightarrow$ $h=x-a$ ）とおく。このとき，

$h\to 0$ のとき $x\to a$ であることに注意すると

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

よって $$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}\times(x-a)=f'(a)\times 0=0 \cdots ①$$

また，線形性より

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}f(a)=\lim_{x\to a}f(x)-f(a) \cdots ②$$

[※文字 x がないので，$\lim\limits_{x\to a}$ は不要]

従って，①と②より $\lim\limits_{x\to a}f(x)-f(a)=0$ $\quad \therefore \lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

この結果は，「$f(x)$ が $x=a$ で連続」であることを意味している。

1.6 反例

反例を紹介します

逆） $f(x)$ が $x=a$ で連続 $\Rightarrow$ $f(x)$ が $x=a$ で微分可能 [偽]

[反例] $y=|x|$

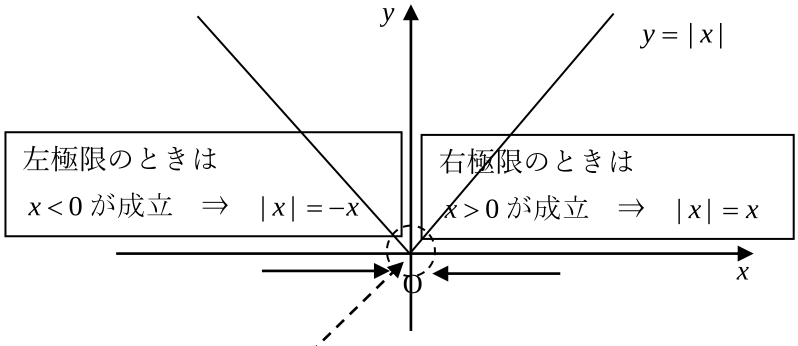
$$\text{絶対値} \quad y=|x|=\begin{cases} x & (x>0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x=0 \text{ のとき}) \\ -x & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$x=0$ において [※値であるが，結果が異なる]

左極限 $$f'(0)=\lim_{h\to -0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1$$

右極限 $$f'(0)=\lim_{h\to +0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1$$

よって，極限値 $f'(0)$ が存在しないので，微分不可能である。



※$x=0$　において，連続であるが，微分は不可能。
これは，尖っているところでは微分はできないことを，
つまり，微分可能な関数は滑らかな曲線であることを
意味しています。

1.7　絶対値を含む曲線(応用)

例題　次の関数が表すグラフを描け。また，微分不可能な場所を求めよ。

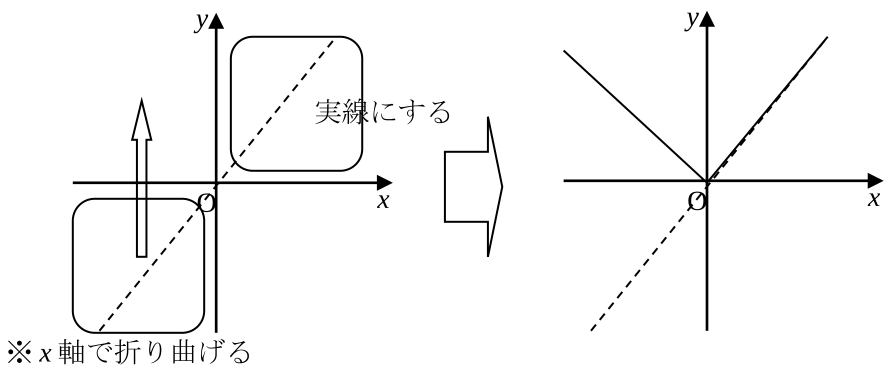
(1)　$y=|x|$　　　　　　　　(2)　$y=|x^2-2x-3|$

［解法］　①まず，絶対値のない通常のグラフを破線で描きます。

②次に，x 軸の下側(y の値が負の部分) を x 軸対称に移動させて(x 軸で折り曲げた形にして)，実線で描きます。

[※x 軸の上側は，破線をそのまま実線でなぞります。]

［解答］(1) ①直線　$y=x$　を破線で描く　　　　②$y=|x|$のグラフを実線で描く



微分不可能な場所：$x=0$

(2) $y=|x^2-2x-3|$

①$y=x^2-2x-3$

$=(x-1)^2-1-3$

$=(x-1)^2-4$

$\therefore\ y+4=(x-1)^2$

：一般形　$y=ax^2+bx+c$　⇒　y 切片 c

：平方完成　$x^2+2kx=(x+k)^2-k^2$

[※ⅰ)半分　ⅱ)２乗を引く]

：標準形　$y-q=a(x-p)^2$　⇒　頂点 $(p,\ q)$

よって

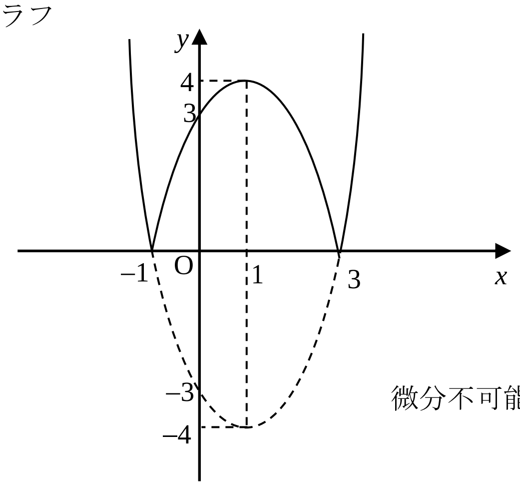
A）頂点 $(1,\ -4)$

B）y 切片（$x=0$）　$y=-3$

C）x 切片（$y=0$）　一般形より　$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$　　$\therefore\ x=-1,\ 3$

②グラフ



微分不可能な場所　$x=-1,\ 3$

問 4.1　次の関数が表すグラフを描け。また，微分不可能な場所を求めよ。

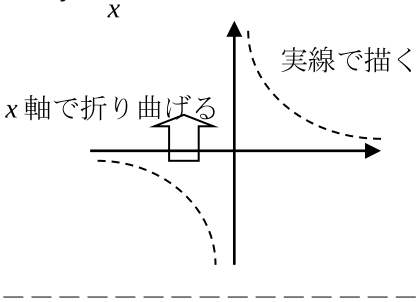
(1) $y=\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|$　　　(2) $y=|x^2-4x+3|$

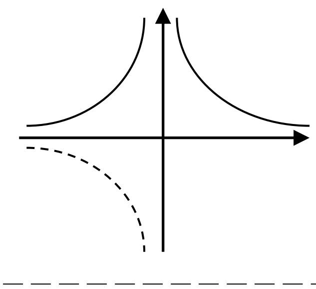
＝＝

【研究】２乗にも，絶対値と同じ効果を期待することができます。

例）$y=\dfrac{1}{x^2}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$　　[※同じ効果：負の値を正の値に変換する]

①$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを破線で描く　　②x 軸で折り曲げる





＝＝