§５　直線と円の方程式

5.1　直線の方程式位置

直線の方程式とは？

既に，皆さんは直線の方程式が

［直線の方程式］ $y = mx + n$

により表されることを知っています。

今回は，直線の方程式を，次の形で表現します。

［直線の方程式］　$ax + by + c = 0$

実際　$ax + by + c = 0 \quad \Rightarrow \quad by = -ax - c$

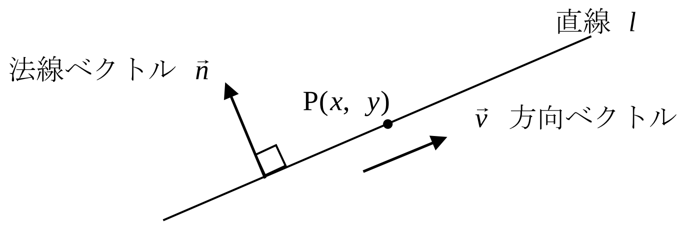
$$\therefore\ y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + n \quad \left(m = -\frac{a}{b},\ n = -\frac{c}{b} \right)$$

と変形できますね。

5.2　方向ベクトルと法線ベクトル

方向ベクトルとは，法線ベクトルとは？

直線l に平行なベクトルを，**方向ベクトル**[記号：$\vec{v}$]といい，
垂直なベクトルを，**法線ベクトル**[記号：$\vec{n}$]という。



直線l 上の任意の点 P$(x,\ y)$ として，直線の方程式の公式を導きます。

※定点とは，指定されて自由に選択できない点。
任意の点とは，特に指定がなく自由に選択できる点。
よって，直線上の任意の点とは，直線上であればどこの
点でもよいということになります。

［直線の方程式］

(1) 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ を通り，方向ベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の直線

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}$$

(2) 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ の直線

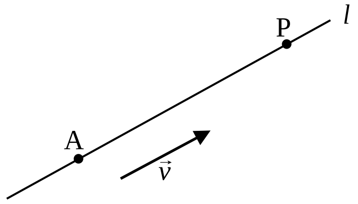
$$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)=0$$

証明）各点の位置ベクトルは，小文字で表す。

(1) 求める直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

平行条件より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\ /\!/\ \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\vec{v}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$　より



$$\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

よって，次の連立方程式が得られる

$$\begin{cases} x-a_1=kv_1 & \cdots① \\ y-a_2=kv_2 & \cdots② \end{cases}$$

①より　$\dfrac{x-a_1}{v_1}=k$　　②より　$\dfrac{y-a_2}{v_2}=k$

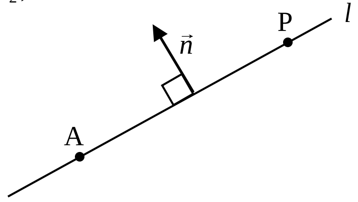
従って，結果の公式が導ける　$\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}(=k)$

(2) 求める直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

直交条件より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp /\!/\ \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$　＆　$\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$　より

結果の公式が導ける　$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)=0$



例題　２点 A(−3, 5)，B(5, −1) について，次の問いに答えよ。

(1) 直線 AB の方程式を求めよ。

(2) 線分 AB の垂直２等分線の方程式を求めよ。

［解答］各点の位置ベクトルは小文字で表す。

(1) 求める直線の方向ベクトルは

$$\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$$

[※方向ベクトルは，直線と重なっても大丈夫です。]

よって，点 A を通り，方向ベクトル $\vec{v}$ の直線は

$$\frac{x+3}{8}=\frac{y-5}{-6} \qquad \Rightarrow \qquad -6(x+3)=8(y-5)$$

$$-6x-18=8y-40$$

$$-6x-8y+22=0 \qquad\qquad \therefore\ 3x+4y-11=0$$

(2) 求める垂直２等分線の法線ベクトルは，直線 AB の方向ベクトルなので

$$\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$$

また，線分 AB の中点を M とすると

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

よって，点 M を通り，法線ベクトル $\vec{n}$ の直線は

$$8(x-1)-6(y-2)=0$$

$$8x-8-6y+12=0$$

$$8x-6y+4=0 \qquad\qquad \therefore\ 4x-3y+2=0$$

問 6.17　２点 A(1, 3)，B(4, 5) について，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示を求めよ。

(2) 点 C(2, −1) を通り，直線 AB に平行な直線の方程式を求めよ。

(3) 点 C(2, −1) を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式を求めよ。

【注意】方向(法線)ベクトルは，直線に平行(垂直)なベクトルなので
１つとは限りません。まず、大きさが自由に設定できます。
また、向きも逆向きも考えることができます。
特に、平行の場合は直線と重なることもあります。

＝＝＝

【研究】特に表記しませんでしたが，実は，方向ベクトル$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$において

「v_1，v_2 は共に 0 ではない」とするという但し書きが必要です。

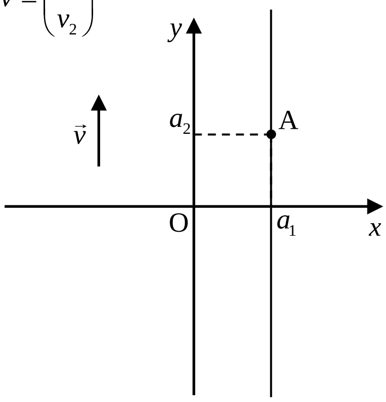
法線ベクトルの$\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$の場合は，敢えて述べる必要ありませんが，

「n_1，n_2 は共に 0 ではない」という条件をいれておきます。

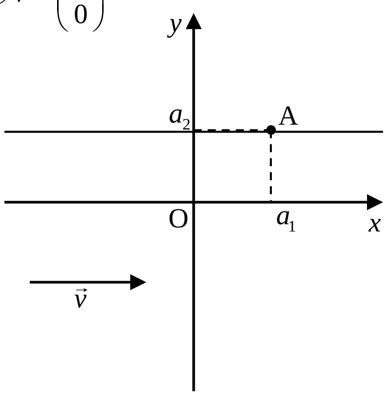
点 A$(a_1,\ a_2)$を通る直線を考える。

$$\left.\begin{array}{ll} ①\ v_1=0\ \text{の場合は，}\ y\ \text{軸に平行な直線} & x=a_1 \\ ②\ v_2=0\ \text{の場合は，}\ x\ \text{軸に平行な直線} & y=a_2 \\ ③\ n_1=0\ \text{の場合は，}\ x\ \text{軸に平行な直線} & y=a_2 \\ ④\ n_2=0\ \text{の場合は，}\ y\ \text{軸に平行な直線} & x=a_1 \end{array}\right\}\ \text{特殊なケース}$$

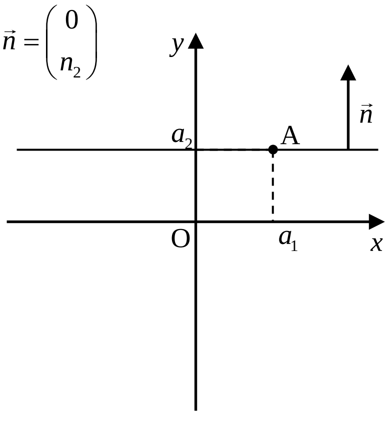
①$\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$

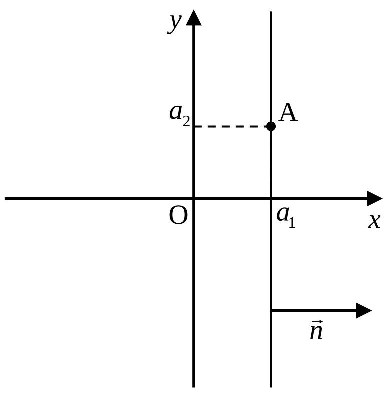


②$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$



③$\vec{n}=\begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \end{pmatrix}$





[※特殊なケースの場合は，図を描くことを推奨します]

＝＝＝

5.3　円の方程式

円の方程式とは？

既に，皆さんは円の方程式が

［円の方程式］ $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=r^2$

により表されることを知っています。
このとき，円の中心が $(a_1,\ a_2)$ となり，半径が $r\ (>0)$ となります。

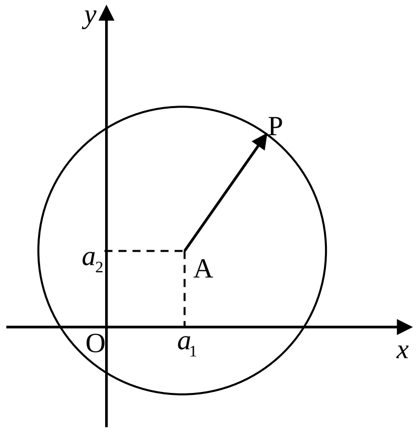
このことを，ベクトルで証明してみましょう。
円上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とします。
円の中心を定点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ とし，半径を r とします。
このとき，点 P が円のどの位置にあったとしても，
必ず次の等式が成り立ちます。

大きさ　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r$ …①

このとき，ベクトルに関する計算を行うと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-a_1\\y-a_2\end{pmatrix}$$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}\ \cdots②$$



①と②より　$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}=r$

$$\therefore (x-a_1)^2+(y-a_2)^2=r^2$$

［円の方程式］

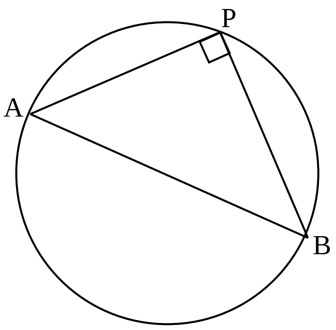
(1) 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ を中心する半径 r の円

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=r^2$$

(2) ２点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を直径の両端とする円の方程式

$$(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)=0$$

証明）(2) 円上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。



線分 AB は円の直径だから　$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$

よって，直交条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0\ \cdots①$$

ベクトルに関する計算を行うと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-a_1\\y-a_2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{p}-\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-b_1\\y-b_2\end{pmatrix}\quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)\ \cdots②$$

従って，①と②より結果が導ける

$$(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)=0$$

例題　２点 $\mathrm{A}(-3,\ 4)$，$\mathrm{B}(5,\ -2)$ を直径の両端とする円を求めよ。

［解答］$(x+3)(x-5)+(y-4)(y+2)=0$

$$x^2-2x-15+y^2-2y-8=0$$

$$x^2+y^2-2x-2y-23=0$$

$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1-23=0$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=25$$

（答）中心 $(1,\ 1)$，半径 5 の円

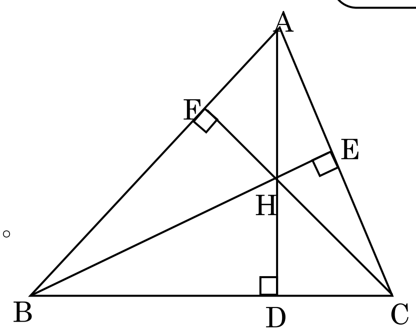
［復習］平方完成：$x^2+\boxed{2a}x=(x+\boxed{a})^2\ \underline{\underline{-a^2}}$

①半分　　②2 乗を引く

問 6.18　２点 $\mathrm{A}(-5,\ 2)$，$\mathrm{B}(3,\ -6)$ を直径の両端とする円を求めよ。

<u>5.4　垂心</u>

垂心とは？



△ABC において

３つの頂点 A，B，C から対辺に降ろした

垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。

このとき，

３本の垂線 AD，BE，CF は１点で交わる。

この交点 H を**垂心**という。

例題　3点 A(2, 6)，B(4, 2)，C(6, 4) を頂点とする垂心の座標を求めよ。

［解答］各点の位置ベクトルは小文字で表す。

1）点Aを通り，直線BCに垂直な直線(前頁図では直線AD)

法線ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

直線の方程式：$2(x-2)+2(y-6)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+2y-16=0\cdots$①

2）点Bを通り，直線CAに垂直な直線(前頁図では直線BE)

法線ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}-\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

直線の方程式：$-4(x-4)+2(y-2)=0 \quad\Rightarrow\quad -4x+2y+12=0\cdots$①

3）垂心Hの座標

①，②より $\begin{cases}x+y=8\\-2x+y=-6\end{cases}$　　$\therefore x=\dfrac{14}{3},\ y=\dfrac{10}{3}$　　（答）$\mathrm{H}\left(\dfrac{14}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$

【復習：クラメルの公式】　$\begin{cases}ax+by=p\\cx+dy=q\end{cases}$ のとき

$$x=\frac{\begin{vmatrix}p&b\\q&d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}=\frac{pd-bq}{ad-bc},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a&p\\c&q\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}=\frac{aq-pc}{ad-bc}$$

※注意　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\vec{h}-\vec{c}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}14\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}14\\10\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=2\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)-4\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{8}{3}+\dfrac{8}{3}=0$

この結果は、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を導くので，3本の垂線AD，BE，CFが1点Hで交わることを意味している。

問6.19　3点 A(1, 3)，B(4, 5) C(2, −1) について，次の問いに答えよ。

(1) 点Aを通り，直線BCに垂直な直線の方程式を求めよ。

(2) 問6.17(3)の結果も利用して，△ABCの垂心Hの座標を求めよ。