4.4　相等

相等とは？

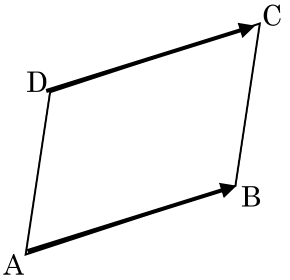
２つのベクトル　$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$　において

$$\boxed{[\text{相等}]\quad \vec{a}=\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\end{cases}}$$

とします(定義)。

※２つの概念「向き」と「大きさ」が共に等しいベクトルを，
同じベクトル(相等：$\vec{a}=\vec{b}$)としたのが、最初の定義です。
つまり，平行移動してベクトルが重なる場合です。
よって，成分表示の場合は，各成分が同じ値になります。

例題　４点 A(1, 1)，B(4, 2)，C(5, 5)，D(x, y) を頂点とする四角形 ABCD が，
平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。



［解法］通常，A→B→C→D の順に左(反時計)回りに，
頂点を決めていきます。
このため，平行四辺形である条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

となります(本日の Point)。
条件を，［誤］$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　としないように気を付けてください！

［解答］位置ベクトルを小文字で表す。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{c}-\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-x\\5-y\end{pmatrix}$$

よって，条件(四角形 ABCD が平行四辺形)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}3=5-x\\1=5-y\end{cases} \qquad \therefore \begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$$

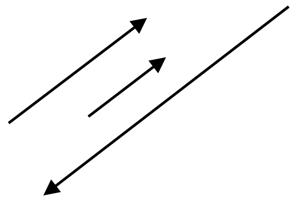
（答）D(2, 4)

問 6.14　４点 A(−5, −2)，B(x, 2)，C(1, 4)，D(3, y) を頂点とする四角形 ABCD が，平行四辺形となるように x，y の値を定めよ。

4.5　平行条件

平行条件とは？

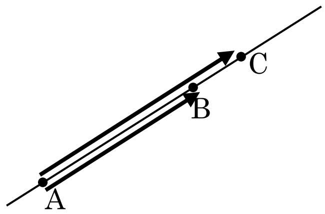
２つのベクトルが**平行**[記号：$\vec{a}\,//\,\vec{b}$]とは,
「向き」が同じ(＋)か，逆向き(−)の場合のときを言います
今回は「大きさ」は，特に関係ありません。
つまり，伸縮(実数倍)の自由度が存在するので
次の様に，定義されます。



［平行条件］　$\vec{a}\,//\,\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = k\vec{a}$　（k は実数）

例題　３点 $A(1,\ 1)$，$B(4,\ 2)$，$C(5,\ y)$ が，一直線上に並ぶように y の値を定めよ。

［解法］「一直線上並ぶ」場合は,
２つのベクトルの始点を同じ
にすることが，Point です。



［解答］位置ベクトルを小文字で表す。

同じ

$$\overrightarrow{\boxed{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\boxed{\mathrm{A}}\mathrm{C}} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

よって，条件(３点 A,B,C が一直線上に並ぶ)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ y-1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4 = 3k & \cdots ① \\ y-1 = k & \cdots ② \end{cases}$$

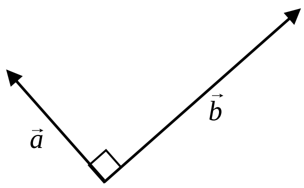
①より　$k = \dfrac{4}{3}$　　②に代入すると　$y - 1 = \dfrac{4}{3}$　　$\therefore\ y = \dfrac{7}{3}$

問 6.15　３点 $A(x,\ -1)$，$B(1,\ 3)$，$C(5,\ 5)$ が，一直線上に並ぶように x の値を定めよ。
[Hint：同一始点は必ずしも A である必要性はありません]

4.6　直交条件

垂直条件とは？

２つのベクトルが**直交**[記号：$\vec{a}\perp\vec{b}$]するとは，
２つのベクトルの内積が 0 になることです。



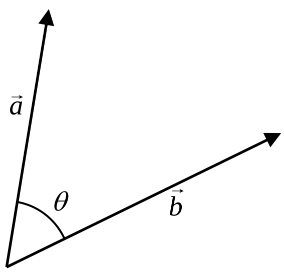
［直交条件］　$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

※「直交」するとは，「直角に交わる」ことです。
つまり，２つのベクトルのなす角は　$\theta=90^\circ$
よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=|\vec{a}||\vec{b}|\times 0=0$　が成り立ちます。
逆に　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　とすると
$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$　より　$\cos\theta=0$　$\therefore\ \theta=90^\circ$
が成り立つので，２つのベクトルは直交します。

【復習：ベクトル_第 02 回】
次の式で計算される値(実数)を，**内積**と言います

［内積］　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

但し，θ は２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がなす角で，
取りうる範囲は　$0\leqq\theta\leqq\pi$　(狭い方の角)



※「なす角」とは？
２つのベクトルの始点を合わせます。(重要)
このときにできる２つのベクトルにより挟まれる(狭い方の)角のこと。

【復習：ベクトル_第 03 回】
次の計算式が得られます。

［内積］　$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$　のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

例題　３点 A$(1,\ 3)$，B$(3,\ y)$，C$(5,\ 5)$ を頂点とする三角形が
$A=90^\circ$ である直角三角形となるように，y の値を定めよ。

［解答］位置ベクトルを小文字で表す。

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\y-3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

よって，条件($A=90^\circ$ である直角三角形)より

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \quad \Rightarrow \quad 8+2(y-3)=0$　より　$8+2y-6=0$

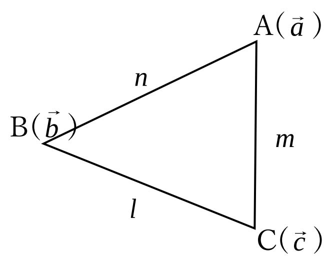
$2y=-2 \qquad \therefore y=-1$

問 6.16　３点 A$(1,\ 3)$，B$(3,\ y)$，C$(7,\ 5)$ を頂点とする三角形が
$B=90^\circ$ である直角三角形となるように，y の値を定めよ。

＝＝

【研究：△ABC の内心 I の位置ベクトル】

△ABC の各頂点の位置ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に対して，
内心 I の位置ベクトルを紹介しておきます。



［内心 I］　$\vec{i}=\dfrac{l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}}{l+m+n}$

但し，$l,\ m,\ n$ は△ABC の３辺の長さ

$BC=l,\ CA=m,\ AB=n$

例）３点 A$(1,\ -3)$，B$(5,\ 1)$，C$(2,\ 4)$ を頂点とする三角形において

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \qquad n=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

同様の計算を行うと　$l=|\overrightarrow{BC}|=3\sqrt{2}$，$m=|\overrightarrow{CA}|=5\sqrt{2}$

よって，内心 I の位置ベクトルは

$$\vec{i}=\frac{l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}}{l+m+n}=\frac{3\sqrt{2}\vec{a}+5\sqrt{2}\vec{b}+4\sqrt{2}\vec{c}}{3\sqrt{2}+5\sqrt{2}+4\sqrt{2}}=\frac{1}{12}\left\{3\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

[復習]　$s=\dfrac{l+m+n}{2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$　とおくと　[ヘロンの公式]

△ABC の面積は　$S=\sqrt{s(l-s)(m-s)(n-s)}=\sqrt{6\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=12$

従って，内接円の半径は　$S=rs$　より　$r=\sqrt{2}$

＝＝