§４　位置ベクトル

4.1　位置ベクトル

位置ベクトルとは？

点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ に対して，
原点 O を始点とするベクトルを，点 A の**位置ベクトル**といい
小文字 a を用いて表す。

［位置ベクトル］　点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ の位置ベクトル　$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

今後は，次の様な表現が頻繁に出てきます。
「２点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ の位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b}$ とする。」
「２点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ の位置ベクトルをそれぞれの小文字で表す」など

これらの表現は，各点の座標をベクトルの成分とすると言っている。
つまり　$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$　$\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

［基本公式］２点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ の位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b}$ とする。
このとき，次の関係式が成り立つ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix}$　[※後(終点)から前(始点)を引くと覚える！]

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$　[距離の公式]

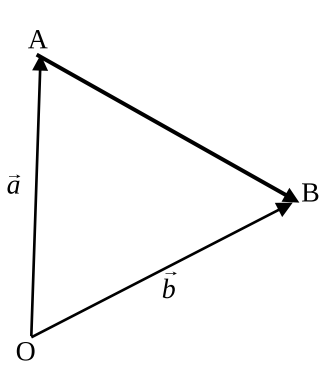
証明）各点の位置ベクトルは　$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix}$$

また，ベクトルの大きさの公式より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$



例題　３点 $A(-2,\ 5)$，$B(-1,\ 2)$，$C(1,\ 4)$ を頂点とする三角形の形状を述べよ。

［解答］各点の位置ベクトルを小文字で表す。

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \qquad \therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \qquad \therefore |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \qquad \therefore |\overrightarrow{CA}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

よって，AB=AC の二等辺三角形である。

問 6.10　３点 $A(1,\ -1)$，$B(3,\ 1)$，$C(-2,\ 2)$ を頂点とする三角形の形状を述べよ。

4.2　内分点と外分点

内分点，外分点とは？

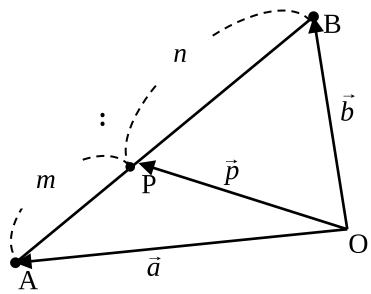
内分点は復習ですね[ベクトル_第 02 回を参照]

線分 AB 上に点 P をとる。

いま，$AP:PB=m:n$　であるとき

点 P は線分 AB を $m:n$ に**内分**する点という。

このとき，次の公式を得ることができる。



［内分点］　線分 AB を $m:n$ に内分する点 P に関して

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

例題　２点 $A(-2,\ 5)$，$B(4,\ -1)$ について

線分 AB を $2:1$ に内分する点 P の座標を求めよ。

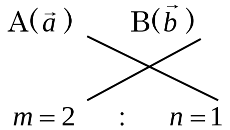
［解答］各点の位置ベクトルを小文字で表す。

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

（答）$P(2,\ 1)$

【解法】

クロスさせる



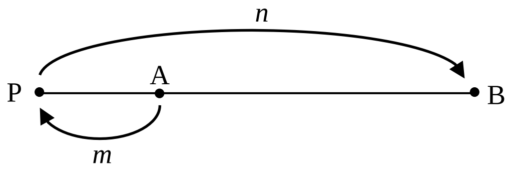
問 6.11　２点 $A(-3,\ -1)$，$B(7,\ 4)$ について

線分 AB を $3:2$ に内分する点 P の座標を求めよ。

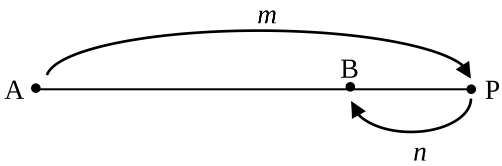
内分点は，分割する点 P を線分 AB の内側に取りました。
外分点は，分割する点 P を半直線 AB 上の線分 AB の外側に取ります。

線分 AB を $m:n$ に外分する点 P

ｉ） $m<n$ の場合



ⅱ） $m<n$ の場合



[※重要：内分も外分も，点 A→点 P→点 B の順番で比率 $m:n$ を考えます。]

このとき，次の公式を得ることができる。

> ［外分点］　線分 AB を $m:n$ に外分する点 P に関して
>
> $$\vec{p}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

証明） ｉ） $m<n$ の場合

点 A が線分 PB を $m:n-m$ に内分しているので

$$\vec{a}=\frac{(n-m)\vec{p}+m\vec{b}}{m+(n-m)}=\frac{n-m}{n}\vec{p}+\frac{m}{n}\vec{b}$$

両辺を n 倍すると　$n\vec{a}=(n-m)\vec{p}+m\vec{b}$

$$(n-m)\vec{p}=n\vec{a}-m\vec{b}$$

よって　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{n-m}=\dfrac{-(n\vec{a}-m\vec{b})}{-(n-m)}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

ⅱ） $m>n$ の場合

点 B が線分 AP を $m-n:m$ に内分しているので

$$\vec{b}=\frac{n\vec{a}+(m-n)\vec{p}}{(m-n)+n}=\frac{n}{m}\vec{a}+\frac{m-n}{m}\vec{p}$$

両辺を m 倍すると　$m\vec{b}=n\vec{a}+(m-n)\vec{p}$

$$(m-n)\vec{p}=-n\vec{a}+m\vec{b}$$

よって　$\vec{p}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

例題　2 点 A$(-2,\ 5)$，B$(4,\ -1)$ について

線分 AB を $2:1$ に外分する点 P の座標を求めよ。

［解法］ $m:n$ に外分は， $m:(-n)$ に内分と翻訳できる。

［解答］各点の位置ベクトルを小文字で表す。

$$\vec{p}=\frac{-\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}=-\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+8\\-5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-7\end{pmatrix}$$

（答）P$(10,\ -7)$

【解法】

クロスさせる

A$(\vec{a})$　　B$(\vec{b})$

$m=2$　:　$-n=-1$

問 6.12　2 点 A$(2,\ -1)$，B$(5,\ 2)$ について

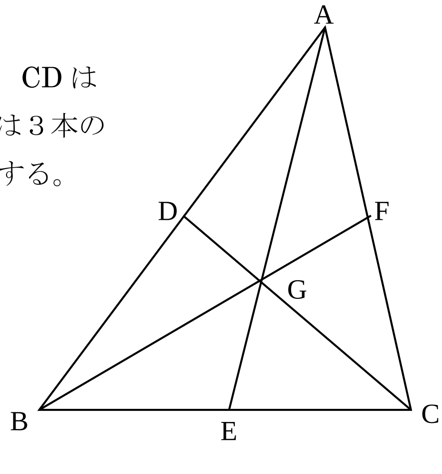
線分 AB を $1:4$ に外分する点 P の座標を求めよ。

4.3　重心

重心とは？

[※ベクトル_第 02 回の【研究】を参照]

△ABC おいて，各辺 AB，BC，CA の中点を D，E，F とする。このとき，３本の線分 AE，BF，CD は１点で交わる。この交点 G を**重心**と呼び，重心 G は３本の各線分 AE，BF，CD を $2:1$ に内分する場所に位置する。



［重心の位置ベクトル］

３点 A，B，C を頂点とする△ABC の重心 G

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

証明）各点の位置ベクトルを小文字で表す。

点 D は線分 AB の中点(1:1 に内分する点)だから

$$\vec{d}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdots①$$

点 G は線分 CD を $2:1$ に内分する点だから

$$\vec{g}=\frac{\vec{c}+2\vec{d}}{3}\cdots②$$

［中点の位置ベクトル］

2 点 A，B の中点 M

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

①を②に代入すると

$$\vec{g}=\frac{\vec{c}+2\times\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

例題　３点 A(−2, 5)，B(4, 3)，C(1, −2) について

(1) 線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(2) △ABC の重心 G の座標を求めよ。

［解答］各点の位置ベクトルを小文字で表す。

(1) $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$　　（答）M(1, 4)

(2) $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$　　（答）G(2, 2)

問 6.13　３点 A(−7, −5)，B(5, −3)，C(−1, 11) について，次の問いに答よ。

但し，各点の位置ベクトルは小文字で表すことにする。

(1) 線分 BC の中点 M の座標を求めよ。

(2) △ABC の重心 G の座標を求めよ。

＝＝

【参考：三角形の①重心，②内心，③外心】

①三角形の３つの中線は１点で交わり，その交点は中線を２：１の比に分ける。

この１点で交わった点 G を三角形の**重心**という。

②三角形の３つの内角の２等分線は１点で交わり，その点から３辺までの距離は等しい。

この１点で交わった点 I を三角形の**内心**という。

③三角形の３辺の垂直二等分線は１点で交わり，その点から各頂点までの距離は等しい。

この１点で交わった点 Q を三角形の**外心**という。

［1 年復習：三角形への応用から抜粋］

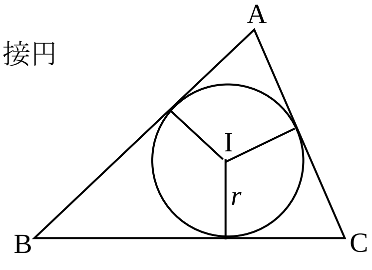
1）三角形の内部で３つの辺に接する円を**内接円**といいます。

内接円の中心[内心]は I で，半径は(小文字) r で表します。

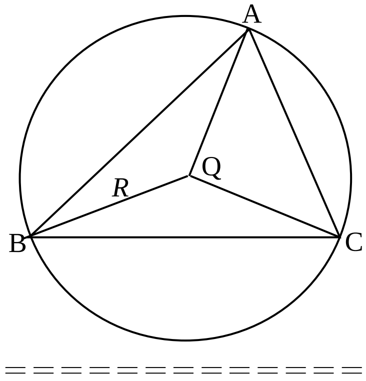
2）三角形の３つの頂点を通る円を**外接円**といいます。

外接円の中心[外心]は Q で，半径は(大文字) R で表します。

内接円



外接円



＝＝