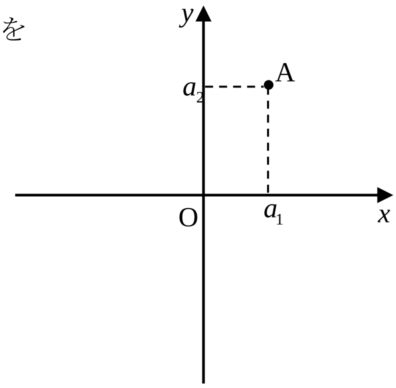
§ 3　平面ベクトル

3.1　平面座標

平面座標とは？



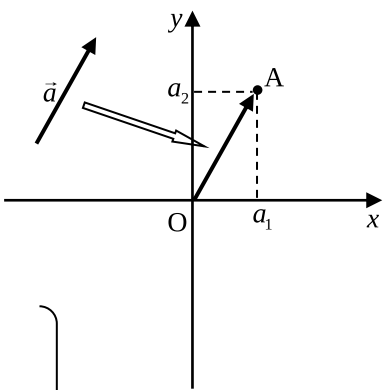
原点 O で直交する２つの数直線(x 軸， y 軸)を
伴う平面全体の座標系を，
平面座標と呼ぶことにする。

平面上の任意の点 A は，
x 座標と y 座標により
　　　A $(a_1,\ a_2)$
と表される。

※ x 座標， y 座標は，それぞれ第１成分，第２成分とも言われます。

3.2　成分表示

成分表示とは？



ベクトル $\vec{a}$ の始点を原点 O に移動させたとき，
矢先が示す点 A の座標 $(a_1,\ a_2)$ を，
$\vec{a}$ の**成分表示**という。

［成分表示］　$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

※この TEXT では，座標と成分表示を区別するため
　　「座標」は横書き　　　A $(a_1,\ a_2)$
　　「ベクトル」は縦書き　　$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
で表記する。

3.3　ベクトルの大きさ

大きさの計算法は？

まず，２点間の**距離の公式**を復習しておきましょう。

［距離の公式］　２点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ において

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

説明）$\mathrm{AC}=b_1-a_1$

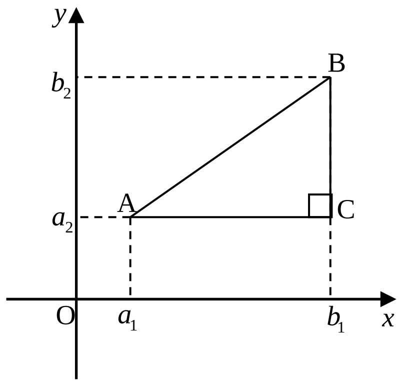
$\mathrm{BC}=b_2-a_2$

$\triangle\mathrm{ABC}$ は直角三角だから

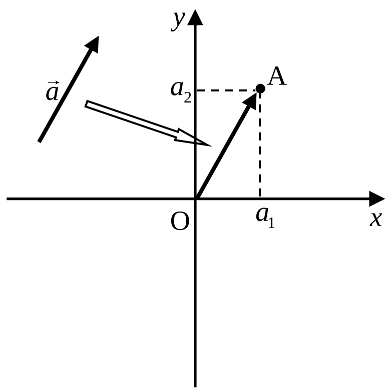
三平方の定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2$$
$$=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

よって，距離の公式が導ける。



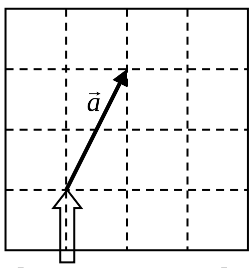
原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ との距離が
ベクトル $\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ となるから，
次の関係式が得られる。



［大きさ］

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$　のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

例題　次のベクトルの成分表示と大きさを求めよ。



[※始点が原点 O]

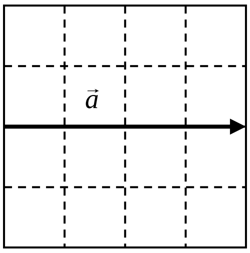
［解法］「始点を原点に移動する」ではなく，
「始点が原点である」と考えよう。

［解答］成分表示　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

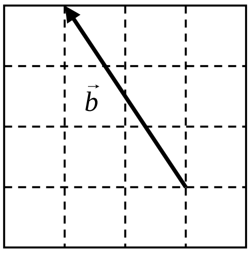
大きさ　$|\vec{a}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

問 6.6　次のベクトルの成分表示と大きさを求めよ。

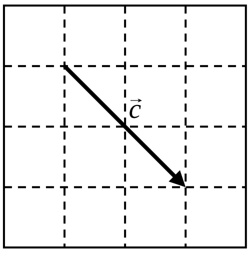
(1)



(2)



(3)



3.4　ベクトルと実数との積

実数との積の計算法は？

いくつかの例で確認しましょう。

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

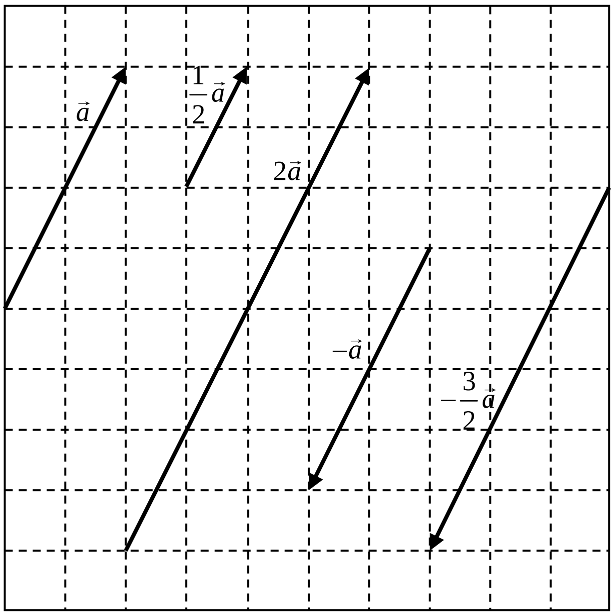
このとき

$$\frac{1}{2}\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$2\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$$

$$-\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$-\frac{3}{2}\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$$



一般には，次の公式が成り立ちます。

［実数との積］　k は実数とする

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\text{ のとき }\quad k\vec{a}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\end{pmatrix}$$

3.5　ベクトルの和と差

和と差の計算法は？

ベクトルの和は，次で計算されます。

［和］　$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$　のとき　$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$

このとき，差は「逆ベクトルの和」であったので

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+(-b_1)\\a_2+(-b_2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$$

なる計算が成立します。

よって，ベクトルの差は，次の式で計算されます。

［差］　$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$　のとき　$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$

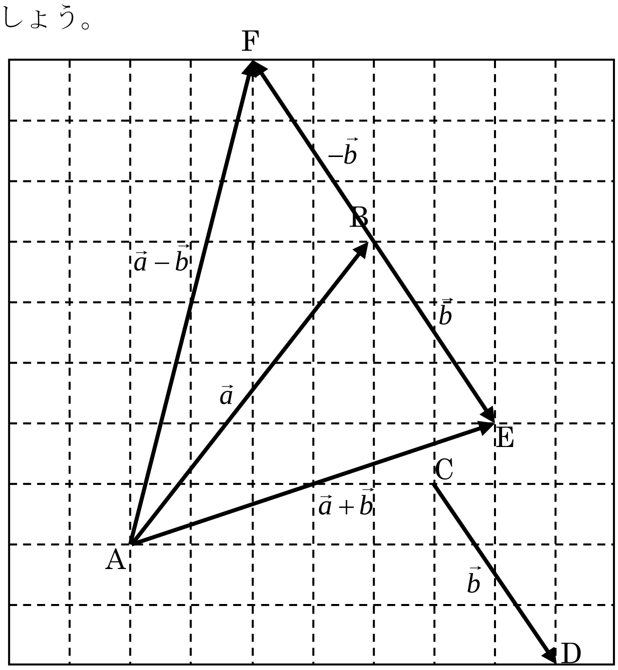
具体的な例で，確認しておきましょう。

$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

のとき

$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4+2\\5+(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}4-2\\5-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$



3.6　例題

例題　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ のとき，次のベクトルを成分表示で表せ。

(1)　$2\vec{a}+3\vec{b}$　　　　(2)　$3\vec{a}-2\vec{b}$

［解答］(1)　$2\vec{a}+3\vec{b}=2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix}$

(2)　$3\vec{a}-2\vec{b}=3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$

問 6.7　$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ のとき，次のベクトルを成分表示で表せ。

(1)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　　　(2)　$\vec{a}-2\vec{b}$

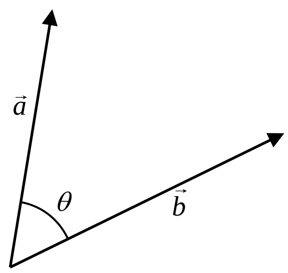
3.7　内積

内積の計算方法は？

復習１）次の式で計算される値(実数)を，**内積**と言います

［内積］　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

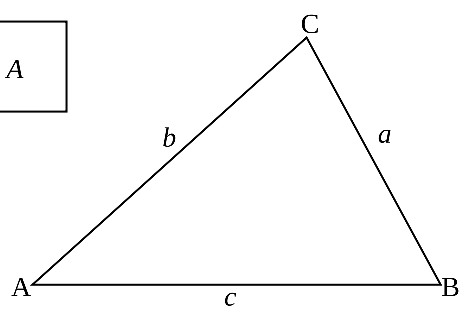
但し，θ は２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がなす角で，
取りうる範囲は　$0\leqq\theta\leqq\pi$　(狭い方の角)



※「なす角」とは？
２つのベクトルの始点を合わせます。(重要)
このときにできる２つのベクトルにより挟まれる(狭い方の)角のこと。

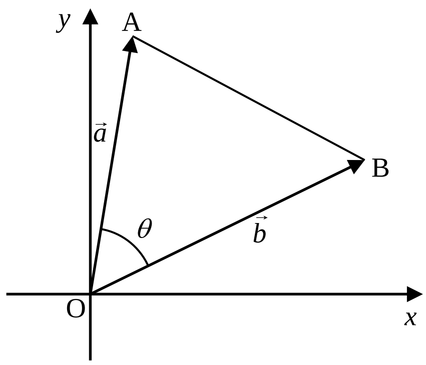
復習２）**余弦定理**は覚えていますか？

［余弦定理］　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



先ほどの２つの内容を組み合わせると，次の計算式が得られます。

［内積］ $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$



証明）まず，内積から

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\cdots①$$
$$=\underline{\underline{\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta}}$$

次に，余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\times\underline{\underline{\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta}}\cdots②$$

よって，①と②より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\times\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2\cdots③$$

いま，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{a}+\vec{b}=-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\end{pmatrix}$$

また $\mathrm{OA}=|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$， $\mathrm{OB}=|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

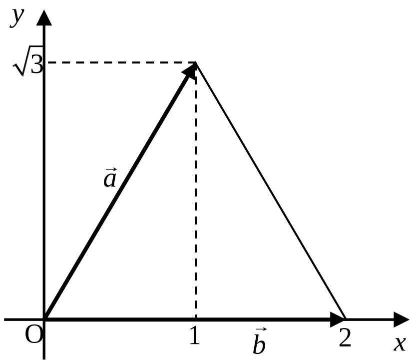
$$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

これらの内容を，③に代入すると

$$2\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}$$
$$=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(b_1^2-2a_1b_1+a_1^2)-(b_2^2-2a_2b_2+a_2^2)$$
$$=2a_1b_1+2a_2b_2$$

よって，結果の計算式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ が得られる。

※実際，１辺の長さが２の正三角形で確認してみましょう。



［定義］ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ より

［計算式］ $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+\sqrt{3}\times0=2$

（※長所：なす角 θ がわからなくても
内積が計算できる）

3.8　内積の性質

どのような性質ですか？

例題に入る前に，内積に関して必要な話を付け加えます。

［性質］　(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(2) 交換法則　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(3) 分配法則　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

証明）$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ とする。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2=|\vec{a}|^2$

(2) $\vec{b}\cdot\vec{a}=b_1a_1+b_2a_2=a_1b_1+a_2b_2=\vec{a}\cdot\vec{b}$

(3) $\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\end{pmatrix}$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

これらの性質を使用すると，整式の展開公式と同じような公式が導けます。

［展開公式］　(4) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(5) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(6) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

証明）(4) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$　：分配法則

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}$　：交換法則

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$　：性質(1)

(5)(6)　複号(±)を用いて同時に行う

$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot(\vec{a}\pm\vec{b})$　：性質(1)

$=\vec{a}\cdot\vec{a}\pm\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$　：分配法則

$=\vec{a}\cdot\vec{a}\pm\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$　：交換法則

$=\vec{a}\cdot\vec{a}\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$　：性質(1)

3.9　例題

例題　$\vec{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) ２つのベクトルの大きさ $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|$ を求めよ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(3) ２つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ がなす角 θ を求めよ。

［解法＆解答］

(1) $\boxed{［公式］\ |\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^1}}$ を適用する

［解答］　$|\vec{a}|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2,\ |\vec{b}|=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

(2) $\boxed{［公式］\ \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$ を適用する

［解答］　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(3) $\boxed{［定義］\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$ を変形して適用する

［解答］　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

問 6.8　$\vec{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ のとき，２つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ がなす角 θ を求めよ。

例題　次の問いに答えよ。

(1) $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{a}+\vec{b}|=3$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$ のとき，大きさ $|\vec{a}+\vec{b}|$ を求めよ。

［解法］ $\boxed{［公式］\ |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$ を適用する。

［解答］(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より

$9=1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\quad\Rightarrow\quad 2\vec{a}\cdot\vec{b}=4\qquad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=9+2+25=36\qquad\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|=6$

問 6.9　次の問いに答えよ。

(1) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{a}-\vec{b}|=2$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，大きさ $|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。