1.9 内積

内積とは？

前回では，実数との積の話をしました。
今回は，２つのベクトルの積を導入(定義)します。
２つのベクトルの積には，

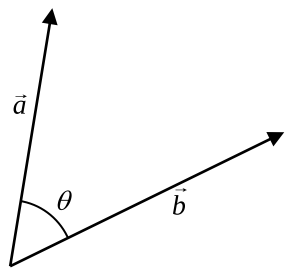
内積［記号：$\vec{a}\cdot\vec{b}$］　と　**外積**［記号：$\vec{a}\times\vec{b}$］

の２種類がありますが，外積は３年生の学習範囲となります。
［※実数の場合は，積の記号“・”と“×”は同じ意味です］

では，本題に戻ります。
次の式で計算される値(実数)を，**内積**と言います

［内積］　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

但し，θ は２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がなす角で，
取りうる範囲は　$0\leqq\theta\leqq\pi$　(狭い方の角)

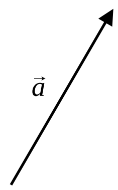


※「なす角」とは？
２つのベクトルの始点を
合わせます。(重要)
このときにできる２つの
ベクトルにより挟まれる
(狭い方の)角のこと。

［性質］　(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
(2) $\vec{a}\perp\vec{b}$　$\Leftrightarrow$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

証明）(1) この場合のなす角は　$\theta=0$　であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|\times|\vec{a}|\times 1=|\vec{a}|^2$$



※２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{a}$ は
重なっているので，
なす角は　$\theta=0$

(2) $\Rightarrow$) $\vec{a} \perp \vec{b}$ より，なす角は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

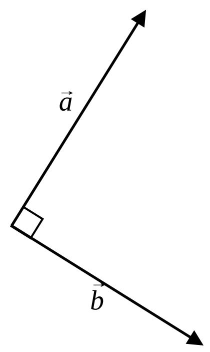
よって，$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{2}$

$= |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times 0 = 0$

$\Leftarrow$) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ より $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 0$

$\therefore \cos\theta = 0$

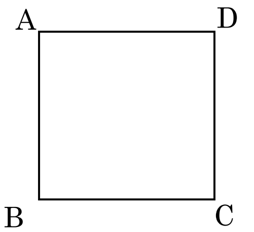
よって $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\theta = \dfrac{\pi}{2}$



例題　右図は辺の長さが 1 の正方形 ABCD である。
このとき，次の内積の値を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$　　(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$　　(4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$



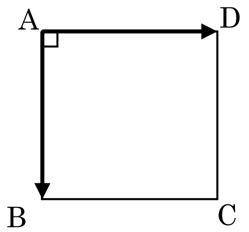
［解答］(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 1 \times 1 \times 0 = 0$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\dfrac{\pi}{4} = 1 \times \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

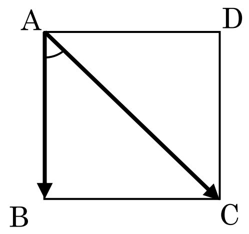
(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|\cos\pi = 1 \times 1 \times (-1) = -1$

(4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|\cos\dfrac{3}{4}\pi = 1 \times \sqrt{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$

(1)

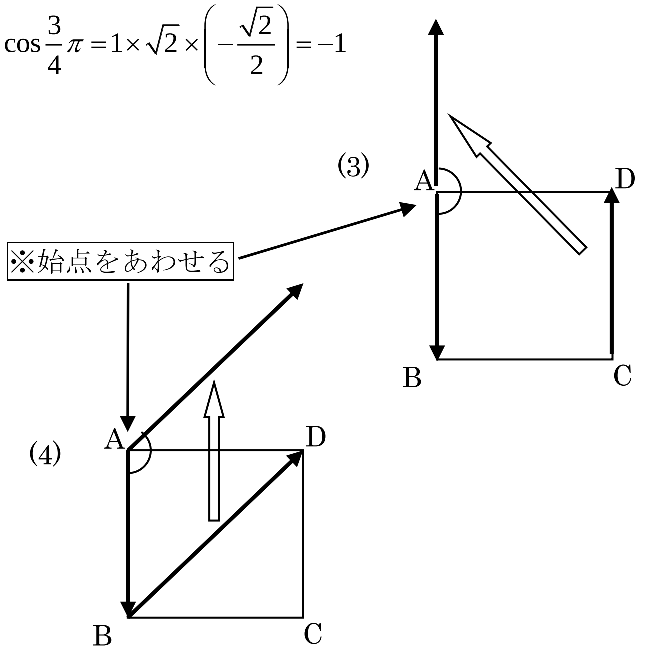


(2)



(3)

(4)



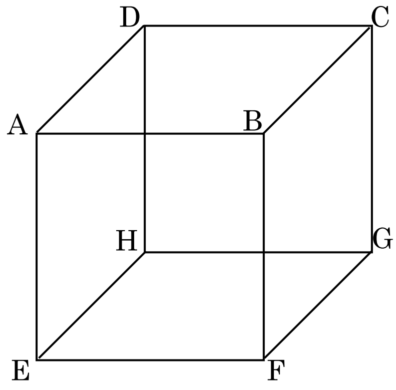
問 6.4　右の図は，１辺の長さが１の立方体 ABCD-EFGH　である。
次の内積の値を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}$　　(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GF}$

(3) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BE}$　　(4) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AF}$

(5) $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BD}$　　(6) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AH}$

Hint : (1)～(5)は始点をそろえて考える
(6) △AFH は何三角形？

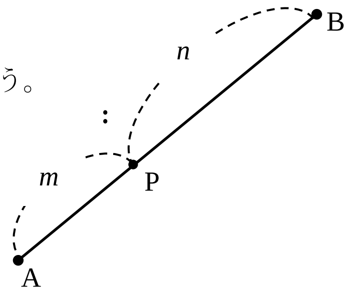


§ 2　ベクトルへの応用

2.1　内分点

内分点とは？

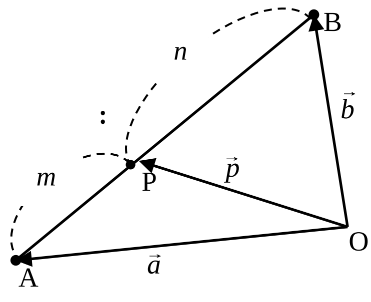
線分 AB 上に点 P をとる。
いま，$AP:PB=m:n$　であるとき
点 P は線分 AB を $m:n$ に**内分**する点という。



この図に矢印(ベクトル)を書き込んでみよう。

1）始点 O を決める(通常は原点)

2）始点 O から各点への
ベクトルを導入する。
(通常は各点の小文字を用いる)
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$



※原点を始点とするベクトルを，
その点における**位置ベクトル**いい，
その点を表すアルファベットの小文字を用いる

このとき，次の公式を得ることができる。

［内分点］　線分 AB を $m:n$ に内分する点 P に関して

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

証明）まず　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{a}+b\cdots$①

よって　$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{(m+n)\vec{a}+m(-\vec{a}+\vec{b})}{m+n}$$

$$=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

※記号 $\vec{a}$ はベクトル(矢印)を表していますが,
実は通常の文字式(上部に矢印なし) a と同じ
様な感覚で計算ができるように作られています。

2.2　中点

中点とは？

線分 AB を 1:1 に内分する点 P を，特に**中点**という。

［中点］　線分 AB の中点 P に関して

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

2.3　ベクトル方程式（発展問題）

ベクトル方程式とは？

線分 AB を，媒介変数(又はパラメータ) t を用いて表します。
この表現式を，**ベクトル方程式**と言います。

具体的には，内分点の公式において　$t=\dfrac{m}{m+n}$　とおきます。

このとき　$\dfrac{n}{m+n}=\dfrac{n+(m-m)}{m+n}=\dfrac{(n+m)-m}{m+n}=1-\dfrac{m}{m+n}=1-t$

が成り立ちます。

つまり，$m:n$ に内分　$\Rightarrow$　$\dfrac{m}{m+n}:\dfrac{n}{m+n}$ に内分

$\Rightarrow$　$t:1-t$ に内分

と書き直されます。

よって，内分点の公式が，次の様に書き直されます。

［ベクトル方程式］

２点 A，B の位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b}$ とする。

線分 AB のベクトル方程式は

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　（但し $0 \leqq t \leqq 1$ ）

$t=0$ のとき　$\vec{p}=\vec{a}$　これは点 P が点 A の所にいることを意味します。

$t=1$ のとき　$\vec{p}=\vec{b}$　これは点 P が点 B の所にいることを意味します。

よって，点 P は線分 AB の内分点であり，t が 0 から 1 まで変化すると，点 A から点 B までを移動していくことになるので，その軌跡が線分 AB を描くことになります。

【注意】○２つのベクトルの向きが「同じ」又は「逆向き」のとき，

平行であるという。

○平行でない２つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}(\neq\vec{o})$ に対しては，

次の性質が成り立ちます。

[性質(1)]　$n\vec{a}+m\vec{b}=\vec{o}$ のとき　$n=m=0$

○[性質(1)]は，[性質(2)]へ書き直されます

[性質(2)]　$n\vec{a}+m\vec{b}=n'\vec{a}+m'\vec{b}$ のとき　$n=n',\ m=m'$

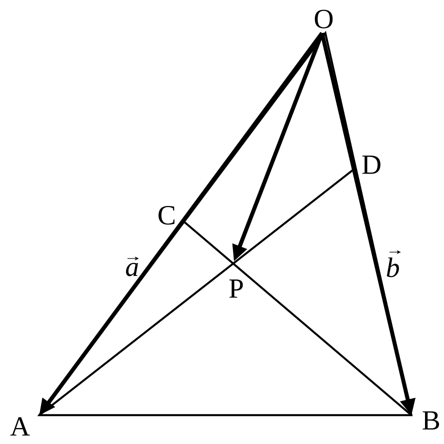
証明）$n\vec{a}+m\vec{b}=n'\vec{a}+m'\vec{b}$　$\Rightarrow$　$(n-n')\vec{a}+(m-m')\vec{b}=\vec{o}$

よって，[性質(1)]より　$n-n'=0,\ m-m'=0$

$\therefore n=n',\ m=m'$

例題　△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$　とする。
点 C は線分 OA の中点とし，点 D は線分 OB を$1:2$ に内分する点とし，
線分 BC と線分 AD の交点を P とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ で表せ。

［解答］問題より　$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\vec{a},\ \vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$



線分 BC のベクトル方程式[媒介変数は t]

$$\vec{p}=\underline{\underline{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}}}=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\ \cdots ①$$

（線分 BC なので，$\vec{b},\ \vec{c}$ で作る）

線分 AD のベクトル方程式[媒介変数は s]

$$\vec{p}=\underline{\underline{(1-s)\vec{a}+s\vec{d}}}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}\ \cdots ②$$

（線分 AD なので，$\vec{a},\ \vec{d}$ で作る）

①と②の $\vec{a},\ \vec{b}$ の係数を比較する。[点 P は交点なので，①と②は一致する]

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}t=1-s & \cdots ③\\ 1-t=\dfrac{1}{3}s & \cdots ④\end{cases}$$

③より　$t=2-2s$

これを，④に代入すると　$1-(2-2s)=\dfrac{1}{3}s$

$$-1+2s=\frac{1}{3}s$$

$$\frac{5}{3}s=1 \qquad\qquad \therefore s=\frac{3}{5}$$

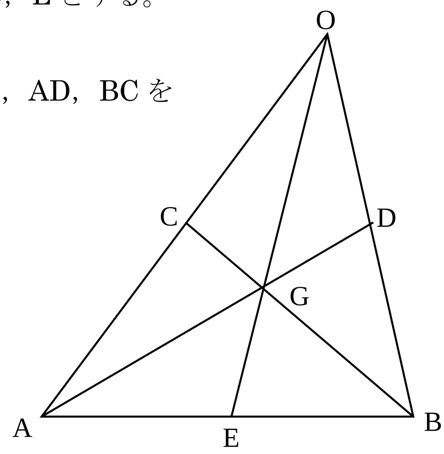
よって，②より　$\vec{p}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

問 6.5　△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$　とする。
点 C は線分 OA を$1:2$ に内分する点とし，点 D は線分 OB を$2:1$に内分する
点とし，線分 BC と線分 AD の交点を P とする。
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ で表せ。

＝＝

【研究：重心】

△OAB において，各辺 OA，OB，AC の中点を C，D，E とする。
このとき，３本の線分 OE，AD，BC は１点で交わる。
この交点 G を**重心**と呼び，重心 G は３本の各線分 OE，AD，BC を $2:1$ に内分する場所に位置する。



まず　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$　とおくと，

$$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\vec{a}\,,\quad \vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

線分 AD のベクトル方程式

$$\vec{g}=(1-t)\vec{a}+t\vec{d}=(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}\ \cdots①$$

線分 BC のベクトル方程式

$$\vec{g}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}=\frac{s}{2}\vec{a}+(1-s)\vec{b}\ \cdots②$$

①と②より　$1-t=\dfrac{s}{2},\ \dfrac{t}{2}=1-s$　　$\Rightarrow$　$t=\dfrac{2}{3},\ s=\dfrac{2}{3}\cdots③$

この結果は　G は線分 AD を $t:1-t=\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{3}=2:1$ に内分することを意味している

同様に　G は線分 BC を $s:1-s=\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{3}=2:1$ に内分することを意味している

③を①(又は②)に代入すると　$\vec{g}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdots④$

点 E は線分 AB の中点だから　中点の公式より　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdots⑤$

④と⑤より　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$

この結果は，次の２つの項目を導きます。

１）３本の線分 OE，AD，BC は１点で交わる

２）G は線分 OE を $2:1$ に内分する

＝＝＝

証明についてくることができましたか？
数値計算ではなく，ベクトル(矢印)だけで，これだけのことが証明できます。
「矢印」の力はすごいですよね。
しかし，次回からはベクトルに「数値計算」を組込みます。