6. 微分

和の記号：

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)、\sum_{k=1}^{n}{}^{2}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

無限等比数列：

$$a+ar+ar^2+\cdots=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r} & (-1<r<1)\\ 発散 & (上記以外)\end{cases}$$

ロピタルの定理：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\underset{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

微分の定義：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

問 次を計算せよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$ $=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)\cdot 3=\frac{1}{6}n(n+1)\underbrace{(2n+1+3)}_{2(n+2)}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots$ $-1<r=\frac{1}{3}<1$ より $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{3}=\frac{6}{3-1}=3$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x}{2}=3$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{2\cos 2x}=\frac{\frac{3}{\cos^2 0}}{2\cos 0}=\frac{\frac{3}{1^2}}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}$

微分公式：$(c)'=0$、$(x)'=1$、$(x^a)'=ax^{a-1}$、$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{-n}{x^{n+1}}$、$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^x)'=a^x\log a$、$(e^x)'=e^x\underbrace{\log e}_{1}=e^x$、$(\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$、$(\log x)'=\frac{1}{x}$、$f\cdot g=f'\cdot g+f\cdot g'$

$(\sin x)'=\cos x$、$(\cos x)'=-\sin x$、$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$、$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x+3)^5$ $y'=5\cdot\underbrace{(2x+3)'}_{2}(2x+3)^4=10(2x+3)^4$

(2) $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ $y'=\frac{Q}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ $\left(Q=\underbrace{(x-1)'}_{1}(x^2+1)-(x-1)\underbrace{(x^2+1)'}_{2x}=-x^2+2x+1\right)$

(3) $y=e^{2x}\sin 3x$ $y'=\underbrace{(e^{2x})'}_{2e^{2x}}\sin 3x+e^{2x}\underbrace{(\sin 3x)'}_{3\cos 3x}=e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)$

(4) $y=x^2\log x$ $y'=\underbrace{(x^2)'}_{2x}\log x+x^2\underbrace{(\log x)'}_{\frac{1}{x}}=2x\log x+x$

(5) $y=\sin^3 2x=(\sin 2x)^3$ $y'=3\cdot\underbrace{(\sin 2x)'}_{2\cos 2x}(\sin 2x)^2=6\cos 2x\sin^2 2x$

(6) $y=x^{2x+5}$ $(x>0)$ $y'=y(\log y)'=x^{2x+5}(\log x^{2x+5})'=x^{2x+5}((2x+5)\log x)'=x^{2x+5}\left(2\log x+\frac{2x+5}{x}\right)$