

5. 場合の数

$$n \text{ 個から } r \text{ 個取り出して並べる順列: } {}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}_{r \text{ 個}}$$

$$n \text{ 個から } r \text{ 個取り出す組合: } {}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

$$2 \text{ 項定理: } (a+b)^n \text{ の展開の一般項} = {}_n C_r a^{n-r} b^r \Rightarrow (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(1) 180 の約数の個数を求めよ。

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ より 約数は $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ ($a=0,1,2, b=0,1,2, c=0,1$) の形だから、 $3 \times 3 \times 2 = 18$ 個

(2) 5 人から 2 名の委員を選ぶ選び方は何通りあるか? ${}_{10} C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ 通り

(3) 男子 4 人、女子 3 人を並べるとき、女子 3 名が隣り合う並べ方は何通りあるか?

女子を一塊と思って考えると ${}_5 P_3 \times {}_3 P_3 = 5! \times 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ 通り

(4) 5 人を円形に並べる円順列は何通りあるか?

一人を固定して考えると $(5-1)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 通り

(5) 赤玉 2 個、青玉 3 個を 1 列に並べる並べ方は何通りあるか?

1 ~ 5 までの札から、赤玉を並べる札を 2 枚選び、残りを青玉にすれば良いので

$${}_5 C_2 \times {}_3 C_3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ 通り}$$

(6) 5 名を 2 名と 3 名のグループに分ける分け方は何通りあるか。

5 名の内からまず 2 名選び、残りを 3 名のグループに割り振ればよいので、 ${}_5 C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ 通り

(7) 6 名を 2 名ずつの 3 グループに分ける分け方は何通りあるか。

先ず A, B, C の 2 名ずつのグループに分け、名前の区別がないように A, B, C 3 個の順列 $3!$ で割る

$$\frac{{}_6 C_2 \times {}_4 C_2 \times {}_2 C_2}{3!} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 \text{ 通り}$$

(8) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ を展開したときの、 x^4 の係数を求めよ。

展開の一般項を計算する

$${}_{10} C_r a^{10-r} b^r = {}_{10} C_r (2 \cdot x)^{10-r} (-1 \cdot x^{-1})^r = {}_{10} C_r \cdot 2^{10-r} \cdot x^{10-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{-r} = (-1)^r {}_{10} C_r \cdot 2^{10-r} \cdot x^{10-2r}$$

$$x^{10-2r} = x^4 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow (\text{係数}) = (-1)^3 {}_{10} C_3 \cdot 2^{10-3} = -\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2^7 = -120 \cdot 128 = -15360$$