4. 図形と式

2 点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ の距離： $AB=|\overrightarrow{AB}|=\left|\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

中心 (p, q) で半径 r の円：$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

2 点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ を $n:m$ に分ける点 P ：$\overrightarrow{OP}=\frac{m}{n+m}\overrightarrow{OA}+\frac{n}{n+m}\overrightarrow{OB}$

傾き m で、点 (p, q) を通る直線：$y=m(x-p)+q$

傾き m の直線に垂直で、点 (p, q) を通る直線：$y=\frac{-1}{m}(x-p)+q$

問 2 点 $A(1, 3)$、$B(2, -1)$ について、次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の長さを求めよ。　$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{17}$

(2) 点 A を中心とし、点 B を通る円の方程式を求めよ。

中心が $A(1, 3)$ で、半径 $AB=\sqrt{17}$ の円だから　$(x-1)^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{17}\right)^2=17$

(3) 2 点 AB を 3 ： 2 に外分する点 P の座標を求めよ。

3 ： − 2 に分ける点だから、$P=\frac{-2}{3+(-2)}A+\frac{3}{3+(-2)}B=(4, -9)$

(4) 直線 AB の方程式を求めよ。

傾き　$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1-3}{2-1}=-4$　で $A(1, 3)$ を通るので、$y=-4(x-1)+3=-4x+7$

(5) 線分 AB の垂直 2 等分線の方程式を求めよ。

AB の中点 $\frac{1}{2}(A+B)=\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ を通り、傾き $\frac{-1}{m}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$ の直線だから、

$y=\frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)+1=\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}$

$y \geqq f(x) \Rightarrow y=f(x)$ の上の領域、$y \leqq f(x) \Rightarrow y=f(x)$ の下の領域

$(x-p)^2+(y-q)^2 \leqq r^2 \Rightarrow$ 円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ の内側

$(x-p)^2+(y-q)^2 \geqq r^2 \Rightarrow$ 円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ の外側

問 不等式 $\begin{cases} y \geqq x \\ x \leqq 1 \\ x^2+y^2 \leqq 4 \end{cases}$ が表す領域を図示せよ。

直線 $y=x$ の上側　かつ　直線 $x=1$ の左側　かつ　円 $x^2+y^2=4$ の内部で境界を含む領域

図は省略

問　焦点（漸近線、準線）等を求めてグラフを書け

楕円　２つの焦点からの距離の和が 一定＝(長軸の長さ)

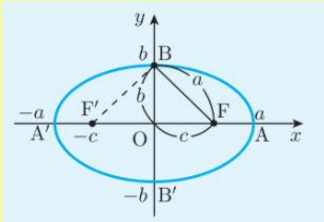
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

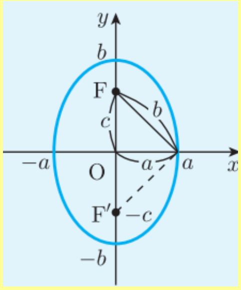
$a>b$ の場合：

長軸の長さ＝$2a$、焦点$\left(\pm\sqrt{a^2-b^2},0\right)$

$a<b$ の場合：

長軸の長さ＝$2b$、焦点$\left(\pm\sqrt{b^2-a^2},0\right)$





(1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　焦点$\left(\pm\sqrt{25-16},0\right)=\left(\pm3,0\right)$　(2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$　焦点$\left(0,\pm\sqrt{25-16}\right)=\left(0,\pm3\right)$

グラフ省略

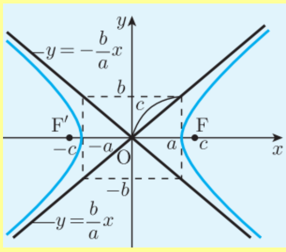
双曲線　２つの焦点からの距離の差が一定＝（頂点間の距離）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

頂点$\left(\pm a,0\right)$

頂点間の距離＝$2a$

焦点$\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},0\right)$

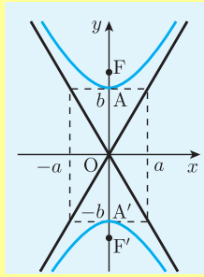


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

頂点$\left(0,\pm b\right)$

頂点間の距離＝$2b$

焦点$\left(0,\pm\sqrt{a^2+b^2}\right)$



(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　焦点$\left(\pm\sqrt{16+9},0\right)=\left(\pm5,0\right)$　(2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$　焦点$\left(0,\pm\sqrt{16+9}\right)=\left(0,\pm5\right)$

漸近線　$y=\pm\frac{3}{4}$　　漸近線　$y=\pm\frac{3}{4}$

グラフ省略

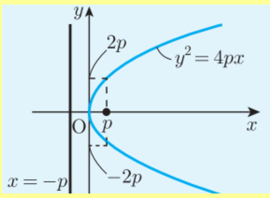
放物線　焦点と準線からの距離が一定

$y^2=4px$

頂点$\left(0,0\right)$

焦点$\left(p,0\right)$

準線 $x=-p$

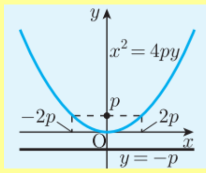


$x^2=4py$

頂点$\left(0,0\right)$

焦点$\left(0,p\right)$

準線 $y=-p$



(1) $y^2=3x$　焦点$\left(\frac{3}{4},0\right)$　準線 $x=-\frac{3}{4}$　　(2) $x^2=3y$　焦点$\left(0,\frac{3}{4}\right)$　準線 $y=-\frac{3}{4}$

グラフ省略