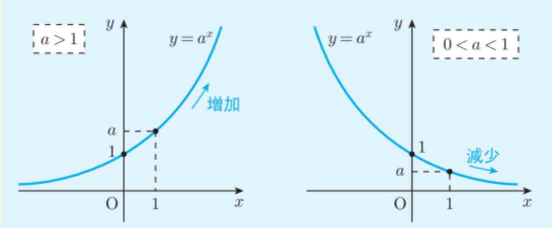
2. 指数関数・対数関数

$y=a^x$ のグラフ

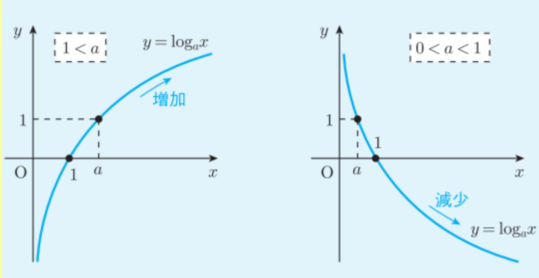


$y=a^x+p$ の漸近線 $y=p$

定義域　実数全体

値　域　$y-p>0 \Rightarrow y>p$

$y=\log_a x$ のグラフ



$y=\log_a(x-p)$ の漸近線 $x=p$

定義域　$x-p>0 \Rightarrow x>0$

値　域　実数全体

問　次の関数のグラフの漸近線および値域と定義域を求め。

グラフが(単調)増加である場合は（増)、(単調)減少である場合は(減)と記せ。

(1) $y=2^{x-1}+2$　漸近線 $y=2$、定義域：実数全体、値域：$y-2=2^{x-1}>0 \Rightarrow y>2$

x	1	2
y	3	4

より(増)

(2) $y=-2^{x-1}+2$　漸近線 $y=2$、定義域：実数全体、値域：$y-2=-2^{x-1}<0 \Rightarrow y<2$

x	-3	-2
y	4	3

より(減)

(3) $y=\log_2(x+1)+3$ 漸近線 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$、定義域：$x+1>0 \Rightarrow x>-1$、値域：実数全体

x	0	1
y	3	4

より(増)

(4) $y=\log_2(-x-1)+3$ 漸近線 $-x-1=0 \Rightarrow x=-1$、定義域：$-x-1>0 \Rightarrow x<-1$、値域：実数全体

x	-3	-2
y	4	3

より(減)

$y=f(x)$ を (p,q) 平行移動 $\Rightarrow y-b=f(x-a) \Rightarrow y=f(x-a)+b$

x 軸対称移動 $\Rightarrow -y=f(x) \Rightarrow y=-f(x)$

y 軸対称移動 $\Rightarrow y=f(-x)$

問　次の関数のグラフを x 軸対称移動した後、$(-1,3)$ 平行移動してから、さらに y 軸対称移動した

グラフの方程式を求めよ。

(1) $y=x^2 \Rightarrow -y=x^2 \Rightarrow -(y-3)=(x+1)^2 \Rightarrow -(y-3)=(-x+1)^2 \Rightarrow y=-(x-1)^2+3$

(2) $y=2^x \Rightarrow -y=2^x \Rightarrow -(y-3)=2^{x+1} \Rightarrow -(y-3)=2^{-x+1} \Rightarrow y=-2^{-x+1}+3$

(3) $y=\log_2 x \Rightarrow -y=\log_2 x \Rightarrow -(y-3)=\log_2(x+1) \Rightarrow -(y-3)=\log_2(-x+1)$

$\Rightarrow y=-\log_2(1-x)+3$

$a^A = a^B \Rightarrow A = B \quad A = a^{\log_a A}$

$a^A < a^B \Rightarrow \begin{array}{l} A < B \ (a > 1) \\ A > B \ (0 < a < 1) \end{array}$

$\log_a A = \log_a B \Rightarrow A = B \quad A = \log_a a^A$

$\log_a A < \log_a B \Rightarrow \begin{array}{l} 0 < A < B \ (a > 1) \\ A > B > 0 \ (0 < a < 1) \end{array}$

問　次の方程式および不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{9}}\right)^x = 9 \cdot 3^{2x} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}\right)^x = 3^2 \cdot 3^{2x} \Rightarrow 3^{\frac{-2x}{5}} = 3^{2+2x} \Rightarrow \frac{-2}{5}x = 2 + 2x \Rightarrow \frac{-12}{5}x = 2 \Rightarrow x = \frac{-5}{6}$

(2) $3^{x+1} < 3^{2x}$　　$3 > 1$　より　$x + 1 < 2x \Rightarrow x > 1$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$　$0 < \frac{1}{3} < 1$　より　$x + 1 > 2x \Rightarrow x < 1$

(4) $\log_2 x = 5 \quad \Rightarrow x = 2^{\log_2 x} = 2^5 = 32$

(5) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$　$0 < \frac{1}{3} < 1$　より　$0 < x - 1 < \left(\frac{1}{2}^2\right) = \frac{1}{4}$

(6) $\log_2 x + \log_2(x-6) < 4 \Rightarrow \log_2 x(x-6) < \log_2 2^4 \Rightarrow$　$2 > 1$　より $x(x-6) < 16$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 16 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-8) < 0 \Rightarrow -2 < x < 8$

また、（真数）> 0 より $\begin{cases} x > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 6$ だから、

$-2 < x < 8$ と合わせて　$6 < x < 8$（答）

指数法則

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ 、$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

$(ab)^p = a^p b^p$ 、$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

$a^0 = 1$、$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

対数の性質　$\log_a a^A = A \quad a^{\log_a A} = A$

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 、$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\log_a M^p = p \log_a M$ 、$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0$

問　次を計算せよ。

(1) $\frac{\sqrt[6]{16} \times \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{2^4} \times \sqrt[3]{2 \cdot 3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 2^{\frac{4}{6}} \times 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{-1}{3}} = 2^{\frac{4}{6}+\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 2^1 \cdot 3^0 = 2$

(2) $\log_6 2 + \log_6 12 - 2\log_6 2 = \log_6 2 \times 12 - \log_6 2^2 = \log_6 \frac{2 \times 12}{2^2} = \log_6 6 = 1$

(3) $\log_2 7 \log_{49} 4 \ = \log_2 7 \log_{49} 4$