

1. 関数とグラフ

$$y = a(x-p)^2 + q \text{ の頂点は } (p, q)$$

問 次の2次関数のグラフの頂点を求めよ。

$$(1) y = 2(x+1)^2 - 3 \quad (-1, -3)$$

$$(2) y = x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \Rightarrow \left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$$

$$(3) y = 3x^2 + 5x - 7 = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x\right) - 7 = 3\left\{\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right\} - 7 = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - 3 \cdot \frac{25}{36} - 7$$
$$= 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{109}{12} \Rightarrow \left(-\frac{5}{6}, -\frac{109}{12}\right)$$

$$y = \frac{1}{x-p} + q \text{ の漸近線は } x = p, y = q \quad y = \frac{cx+d}{ax+b} \text{ の漸近線は } \begin{array}{l} ax+b=0 \\ \Rightarrow x = \frac{-b}{a}, y = \frac{c}{a} \end{array}$$

問 次の分数関数の漸近線を求めよ。

$$(1) y = \frac{2}{x+1} - 3$$

$$(2) y = \frac{3x+1}{2x+1}$$

公式より $x = -1, y = -3$

公式より $x = \frac{-1}{2}, y = \frac{3}{2}$

$$f(x) \text{ の逆関数} \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

元の関数と逆関数のグラフは直線 $y = x$ に関して対称

※ x と y を入れ替えると直線 $y = x$ に関して対称なグラフとなる

問 次の関数の逆関数を求めよ。

$$(1) y = 2^x \Rightarrow x = 2^y \Rightarrow \log_2 x = \log_2 2^y = y \Rightarrow y = \log_2 x$$

$$(2) y = \log_3 x \Rightarrow x = \log_3 y \Rightarrow 3^x = 3^{\log_3 y} = y \Rightarrow y = 3^x$$

$$(3) y = x^2 \ (x \leq 0) \Rightarrow x = y^2 \ (y \leq 0) \Rightarrow y = -\sqrt{x}$$

$$(4) y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow x = \frac{y-2}{y+1} \Rightarrow x(y+1) = y-2 \Rightarrow xy+x = y-2 \Rightarrow xy-y = -x-2 \\ \Rightarrow (x-1)y = -x-2 \Rightarrow y = \frac{-x-2}{x-1}$$

$$y = \pm\sqrt{ax+b} + c \text{ の頂点は } ax+b=0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \Rightarrow y = c \Rightarrow \left(\frac{-b}{a}, c \right)$$

$$\text{定義域は } ax+b \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x \geq \frac{-b}{a} \ (a > 0) \\ x \leq \frac{-b}{a} \ (a < 0) \end{array} \quad \text{値域は } \begin{array}{l} y \geq c \ (y = +\sqrt{\ }) \\ y \leq c \ (y = -\sqrt{\ }) \end{array}$$

問 次の無理関数の頂点と定義域および値域を求めよ。

$$(1) y = \sqrt{x+1} - 3 \text{ (頂点の } x \text{ 座標) } = \sqrt{\ } \text{ の中 } = x+1=0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -3 \text{ だから、} (-1, -3)$$

$$\text{定義域: } = \sqrt{\ } \text{ の中 } = x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \quad \text{値域: } y+3 = \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow y \geq -3$$

$$(2) y = -\sqrt{-2x+4} + 1 \text{ (頂点の } x \text{ 座標) } = \sqrt{\ } \text{ の中 } = -2x+4=0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1 \text{ だから、} (2, 1)$$

$$\text{定義域: } = \sqrt{\ } \text{ の中 } = -2x+4 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \quad \text{値域: } y-1 = -\sqrt{-2x+4} \leq 0 \Rightarrow y \leq 1$$