3.5　関数の極限（Ⅱ）

（Ⅱ）とは？

前回は， $x \to a$［読み： x が限り無く a に近づく］ときを，学習しました。
今回は， $x \to +\infty$（又は $x \to -\infty$）ときについて，学習します。

$x \to +\infty$（又は $x \to -\infty$）とき， $f(x) \to A$ であることを
極限の記号を用いて，次のように表す。

［極限の記号］ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ $\left(\text{又は} \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = A\right)$

関数 $f(x)$ の極限が「1 つの値 A」に限り無く近づくとき
「収束」するといい，収束する値 A を，「極限値」という。
また，収束しないときを，「発散」するという。

特に，証明は添えませんが，次の公式が成り立ちます。

［極限の四則計算］ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$， $\lim_{x \to +\infty} g(x) = B$ のとき

和） $\lim_{x \to +\infty} \{f(x) + g(x)\} = A + B$　　差） $\lim_{x \to +\infty} \{f(x) - g(x)\} = A - B$

積） $\lim_{x \to +\infty} f(x)g(x) = AB$　　商） $\lim_{x \to +\infty} \{f(x) / g(x)\} = A / B$

（※ $x \to -\infty$ のときも同様な四則演算の公式が成り立ちます）

不定形のときは，式の変形が必要です。[極限_第 08 回を参照]

［不定形］ $\infty - \infty$， $\dfrac{\infty}{\infty}$， $\dfrac{0}{0}$， $0 \times \infty$

3.6　例題

例題　次の極限の収束・発散を調べよ。収束する場合は極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$　　(2) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{2x-1}$

(3) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2}{2x-1}$　　(4) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{2x^2-1}$

［確認］直接計算すると，不定形になります。

(1) $\lim_{x\to+\infty}x^n=\infty^n=\infty\times\cdots(n\text{個の積})\cdots\times\infty=\infty$　より　$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)=\infty-\infty$

(2) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{2x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}$　(3) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2}{2x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}$　(4) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{2x^2-1}=\dfrac{\infty}{\infty}$

［解法＆解答］

(1) x の右肩の乗数が最大の項でくくる。

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty\times(1-0)=+\infty$$ （発散）

【注意】重要公式　$\dfrac{1}{+\infty}=+0$

(2)～(4) 分母・分子をそれぞれで，乗数が最大の項でくくる。

[※(1)が式の変形の基本です]

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\boxed{x}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{\boxed{x}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{3+0}{2-0}=\frac{3}{2}$$ （収束）

(3) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\boxed{x^2}\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)}{\boxed{x}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\times\frac{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=+\infty\times\frac{3+0}{2-0}=+\infty$$ （発散）

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{2x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\boxed{x}\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)}{\boxed{x^2}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\frac{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)}=+0\times\frac{3+0}{2-0}=+0$$ （収束）

[※極限_第 07 回の問 2.1 と比較せよ]

問 2.5 次の極限の収束・発散を調べよ。収束する場合は極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to +\infty}(x^2 - x + 1)$　　(2) $\lim_{x \to +\infty}\frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 2}$

(3) $\lim_{x \to +\infty}\frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$　　(4) $\lim_{x \to +\infty}\frac{2x + 3}{x^2 - 1}$

例題　次の極限の収束・発散を調べよ。収束する場合は極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$　　(2) $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$

［確認］直接計算すると，(1)，(2)ともに　不定形$\infty - \infty$　になります。

［解法］(1) は基本問題です。有理化をすると極限計算ができます。

(2) は応用問題です。

まず，有理化をしますが、∞ / ∞の形の不定形になります。

次に，前頁の例題と同様な手法を用いて解答します。

［解答］(1) $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x \to +\infty}\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$　：有理化

$$= \lim_{x \to +\infty}\frac{(x+1) - (x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{+\infty} = +0$$ （収束）

(2) $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$　［$= \infty - \infty$（不定形）　：直接計算］

$$= \lim_{x \to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$　：有理化

$$= \lim_{x \to +\infty}\frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$ $\left[= \frac{\infty}{\infty}\right.$ **(不定形)**　：　**直接計算**$\left.\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$ （収束）

【注意】$\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

（※[性質] $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$　：1年復習）

問 2.6 次の極限の収束・発散を調べよ。収束する場合は極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}\right)$　　(2) $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$

＝＝

【研究】次の問題の違いがわかりますか？

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$

相違点①：x が近づく先

(1)は「$x\to1$」で，(2)は「$x\to+\infty$」です。

相違点②：不定形の形

(1)は「$0/0$」で，(2)は「∞/∞」です。

(1)と(2)では，問題の解き方が異なるので，注意が必要です。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-2}=-4$ （収束）

（※不定形「$0/0$」になる要因）

(1)は因数分解から，不定形の要因を約分により取り除きます。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1$ （収束）

（※不定形「∞/∞」になる要因）

(2)は x^2 でくくってから，不定形の要因を約分により取り除きます。

では，次の問題の違いは分かりますか？

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$　　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$　　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$

相違点は，(1)と(2)とほぼ同じですが，(3)と(4)はともに「通分」、(5)と(6)はともに「有理化」による式の変形を行うことに気づくことが，実際は大切です。

$\boxed{\text{課題}}$で挑戦してみてください。

＝＝