2.2　級数

級数とは？

前回は等比数列の無限和である「等比級数」について学習しました。
今回の前半は，通常の数列の無限和にあたる**級数**について紹介します。

［級数の記号］　$S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

（※どの表現でも対応できるようにしておきましょう。）

発散条件とは？

級数は，和の極限をとるので，収束・発散を調べる必要があります。
このとき，次の性質が知られています。

［発散条件］　$\lim_{n\to+\infty}a_n\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は発散

証明）対偶が真であることを示す。

対偶：$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to+\infty}S_n=S$ （収束）　$\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}a_n=0$

実際　$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)$　　［数列_第 06 回を参照］

$$=\lim_{n\to+\infty}S_n-\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

よって，対偶が真であることが示された。

例）公比が 1 より大きい場合は，等比級数は発散しましたね。
上の命題を確かめてみましょう。

$a_n=2^n$　のとき　$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}2^n=+\infty\neq 0$ ← $\boxed{\text{重要}}$

よって，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}2^k=2+4+8+16+32+\cdots$　は発散

2.3　例題

収束条件はあるの？

残念ながら，

［命題］　$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束　（偽）

です。$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$　であっても，収束・発散の両方が起きます。

例題　次の級数の収束・発散を調べよ。収束する場合は和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$　　(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

［注意］確認　無限大に関する計算　$a/\infty = 0$　（極限_第 01 回を参照）

［解法］①第 n 部分和 S_n を求める。②極限 $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ を調べる。

［解答］①の部分の詳細は，数列_第 04 回を参照のこと

(1) 確認　$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\infty\times\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

① $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$　：部分分数分解

$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$　：相殺

② $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$　（収束）

(2) 確認　$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

① $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right)$　：有理化

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)$　：相殺

② $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right) = \frac{\infty-1}{2} = +\infty$　（発散）

問 2.3 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{A}{2k-1}+\dfrac{B}{2k+1}$ が恒等式となるように，定数 A, B を定めよ。

(2) (1)の結果を利用して，数列の和 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を求めよ。

(3) (2)の結果を利用して，級数の和 $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を求めよ。

§３　関数の極限

3.1　関数の極限

関数の極限とは？

数列 $\{a_n\}$ と同様に，関数 $f(x)$ について極限の内容を取り入れていきます。

変数 x が限り無く a に近づくとき［記号： $x\to a$]，
関数 $f(x)$ の値が「１つの値 A 」限り無く近づくとき［記号： $f(x)\to A$ ］
極限(limt)の記号を用いて，次のように表す。

［極限の記号］　$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=A$

関数 $f(x)$ の極限が「１つの値 A 」に限り無く近づくとき
「収束」するといい，収束する値 A を，「極限値」という。
また，収束しないときを，「発散」するという。

特に，証明は添えませんが，次の公式が成り立ちます。

［極限の四則計算］　$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=A$ ，$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=B$ 　のとき

和）$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=A+B$　　差）$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=A-B$

積）$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)g(x)=AB$　　商）$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)/g(x)\}=A/B$

3.2　形式的な計算法

形式的な計算法とは？

今回は，「無限小」という概念も導入しておきます。

○ 概念「限り無く大きい数」を，記号 ∞ で表す。

[正の無限大　$+\infty$，負の無限大　$-\infty$]

○ 概念「限り無く小さい数」を，記号 0(数字の 0 と同じ)で表す。

[正の無限小　$+0$，負の無限小　-0]

（※無限小の記号を用いるときは，$+0$，-0 の形を多用します。）

これから，「無限大」と「無限小」を用いた「形式的な計算法」を行います。
この「形式的な計算法」の根幹になる重要公式を紹介します。

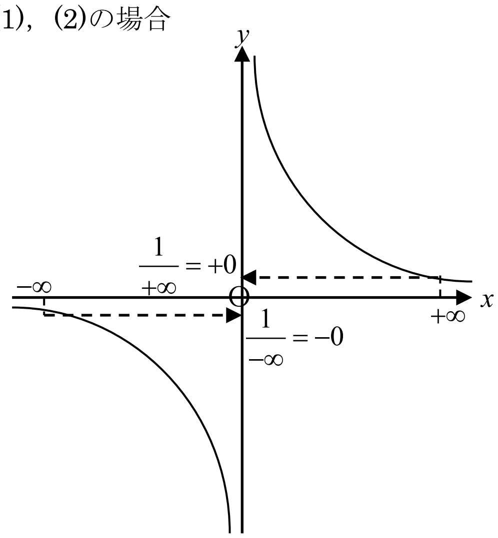
[形式的な計算法(重要公式)]

(1) $\dfrac{1}{+\infty}=+0$　　(2) $\dfrac{1}{-\infty}=-0$

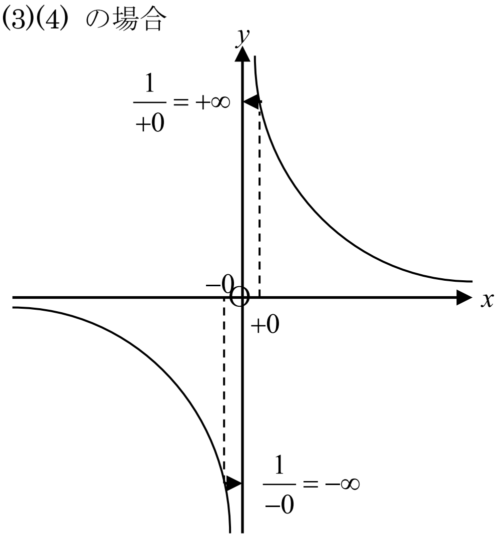
(3) $\dfrac{1}{+0}=+\infty$　　(4) $\dfrac{1}{-0}=-\infty$

説明）関数 $y=\dfrac{1}{x}$ を考える。

(1)，(2)の場合



(3)(4) の場合



前頁の[重要公式]を用いると，次のような「無限大」と「無限小」を含む「形式的な計算法」が行えます。

1）無限大を含む四則計算[極限_第 07 回を参照]　（但し　$a>0$）

① $\infty+a=\infty-a=\infty$　　$\infty\times a=\infty\div a=\infty$

$a-\infty=-\infty$　　$a\div\infty=0$

② $\infty+\infty=\infty$　　$\infty\times\infty=\infty$

※ 不定形(直接計算不能)　$\infty-\infty$，$\infty\div\infty$

2）無限小含む計算[New]　（但し　$a>0$）

④ $a+0=a-0=a$　　$0\times a=0\div a=0$

$0-a=-a$　　$a\div 0=\infty$

⑤ $0+0=0$　　$0-0=0$　　$0\times 0=0$

⑥ $\infty+0=\infty-0=\infty$　　$\infty\div 0=\infty$

$0-\infty=-\infty$　　$0\div\infty=0$

※ 不定形(直接計算不能)　$0\div 0$，$0\times\infty$

重要

【注意】次の２つは，形式的な計算法が可能です。

$$\infty\div 0=\frac{\infty}{0}=\infty\times\frac{1}{0}=\infty\times\infty=\infty$$

$$0\div\infty=\frac{0}{\infty}=0\times\frac{1}{\infty}=0\times 0=0$$

3.3　不定形

不定形とは？

今までも何回かでてきた言葉ですね。
極限操作を行ったとき，直接計算不可である
次の４つの四則演算形を**不定形**と呼ぶことにします。

［不定形］　$\infty-\infty$，　$\dfrac{\infty}{\infty}$，　$\dfrac{0}{0}$，　$0\times\infty$

これからしばらくは，この不定形の問題を
いかにして解くか（式の変形が必要）を学びます。

3.4　例題

例題　次の関数の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$

［確認］単純に計算すると

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}=\frac{1-3+2}{1+4-5}=\frac{0}{0}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{0}\left(1+\frac{1}{-1}\right)=\frac{0}{0}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{4}}{0}=\frac{0}{0}$

(1)～(3)まで，不定形 $\dfrac{0}{0}$ になります。つまり，直接計算不能なので

次のような式の変形を行って，極限値を求めます。

［解答］(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+5)}$　　：因数分解

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+5}=\frac{1-2}{1+5}=-\frac{1}{6}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{(x-1)+1}{x-1}$　　：通分

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$　　：有理化

$$=\lim_{x\to0}\frac{(4+x)-(4-x)}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}=\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

問 2.4　次の関数の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3x+2}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}}{x-1}$