第２章　極限

§１　数列の極限

1.1　無限大

無限大とは？

「限り無く大きい数」という概念を，**無限大**といい
次の記号で表す。

［無限大の記号］　∞　(infinity)

【注意】**正の無限大**を　$+\infty$，**負の無限大**を　$-\infty$　で表す。
通常，正の無限大は，単に　∞　と書かれることが多いが，
本 TEXT では，努めて　$+\infty$　と表す。

1.2　数列の極限

数列の極限とは？

数列$\{a_n\}$の項番号nを，限り無く大きくしていったとき
数列$\{a_n\}$の値がどのようになるかを調べます。
この作業を，「**数列の極限**を調べる」と呼ぶことにします。

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\quad\to\quad ?$

極限の記号を導入します

数列の項番号nが限り無く大きくなるとき［記号：$n\to+\infty$］
数列の値a_nが「1 つの値A」に限り無く近づくとき［記号：$a_n\to A$］
極限(limit)の記号を用いて，次のように表す。

［極限の記号］　$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$

収束とは，発散とは？

数列$\{a_n\}$の極限が「1 つの値A」に限り無く近づくとき
収束するといい，収束する値Aを，**極限値**という。
また，収束しないときを，**発散**するという。

特に，証明は添えませんが，次の公式が成り立ちます

［極限の四則計算］ $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$， $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$ のとき

和） $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = A + B$　　差） $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = A - B$

積） $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = AB$　　商） $\lim_{n\to+\infty}(a_n / b_n) = A / B$

1.3　無限大を含む計算

無限大を含む計算とは？

無限大(∞)は「限り無く大きな数」という概念でしたね。

この概念と通常の数 a との四則計算を考えます。

和） $a + \infty = \infty + a = +\infty$　[少しぐらい増えても無限大は無限大]

差） $\infty - a = +\infty$　[少しぐらい引いても無限大は無限大]

$a - \infty = -\infty$　[でも，引く方向が逆だと負の無限大]

積） $a > 0$ のとき　$a \times \infty = \infty \times a = +\infty$

[無限大を何倍かするとより大きくなるが，やはり無限大]

$a < 0$ のとき　$a \times \infty = \infty \times a = -\infty$

[正か負かどっちの数を掛けるかは重要です]

商） $a > 0$ のとき　$\infty / a = +\infty$

[無限大を多少分割して少し小さくなるが，やはり無限大]

$a / \infty = 0$ [でも，割る方向が逆だと 0 に収束]

※例えば，大きな数として，10^{100} を考えましょう。

$10^{100} = 1000\cdots(0が100個)\cdots000$

よって，その逆数は

$1/10^{100} = 0.00\cdots(0が100個)\cdots0001$

殆ど 0 ですね。

$a < 0$ のとき　$\infty / a = -\infty$， $a / \infty = 0$

次に，無限大と無限大の四則演算を考えます。

和） $\infty + \infty = +\infty$

差） $\infty - \infty = ?$ [直接計算不能]

積） $\infty \times \infty = +\infty$

商） $\infty / \infty = ?$ [直接計算不能]

※直接計算不能の形を**不定形**という

1.4　等比数列の極限

まずは復習から

［初項 a，公比 r の等比数列の一般項］　$a_n = a \cdot r^{n-1}$

【注意：特別な表記】　(1)　$a=1$　のとき，$a_n = 1 \cdot r^{n-1} = r^{n-1}$
(2)　$a=r$　のとき，$a_n = r \cdot r^{n-1} = r^n$

それでは，等比数列 $\{r^n\}$ ［(2)の場合］の極限 $\lim_{n \to +\infty} r^n$ を調べましょう。

①$r>1$　の場合［具体的に，$r=2$　で考える］

等比数列 $\{2^n\}$：2, 4, 8, 16, 32, …

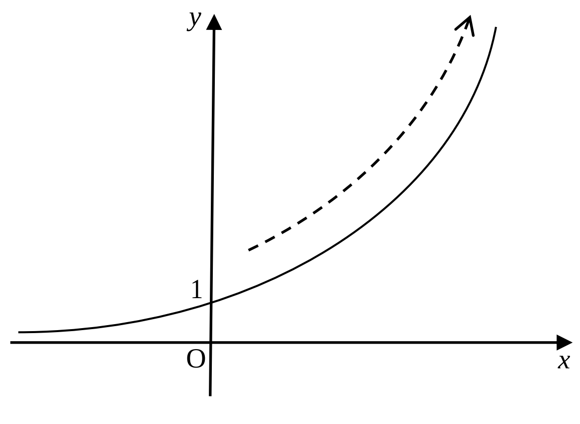
項番号が大きくなればなるほど，ものすごい大きな数になります。

つまり　　2, 4, 8, 16, 32, …　→　$+\infty$

これを，極限の記号で表すと　$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$（発散）

［※無限大という概念(値ではない)なので，収束ではない］

【参考】指数関数　$y = 2^x$　　（無限大へ）



②$r=1$　の場合

等比数列 $\{1^n\}$：1, 1, 1, 1, 1, …

1 は何乗しても 1 なので，この極限は 1 ですね。

つまり　　1, 1, 1, 1, 1, …　→　1

これを，極限の記号で表すと　$\lim_{n \to +\infty} 1^n = 1$（収束）

［※「1 つの値」なので，収束です］

③$0<r<1$ の場合［具体的に，$r=1/2$ で考える］

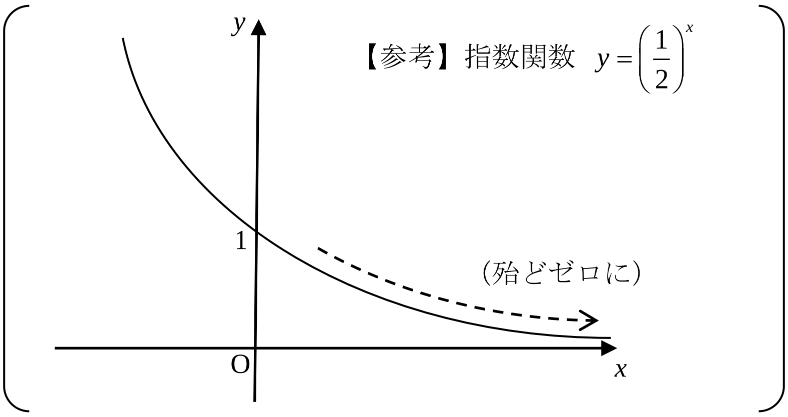
等比数列$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$：$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$

項番号が大きくなればなるほど，小さな数(殆どゼロ)になります。

つまり　　$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots \quad \to \quad 0$

これを，極限の記号で表すと　$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$（収束）

[※「1 つの値」なので，収束]



④$r=0$ の場合

等比数列$\{0^n\}$：$0, 0, 0, 0, 0, \cdots$

0 は何乗しても 0 なので，この極限は 0 ですね。

つまり　　$0, 0, 0, 0, 0, \cdots \quad \to \quad 0$

これを，極限の記号で表すと　$\lim_{n\to+\infty} 0^n = 0$（収束）

[※「1 つの値」なので，収束です]

⑤$-1<r<0$ の場合［具体的に，$r=-1/2$ で考える］

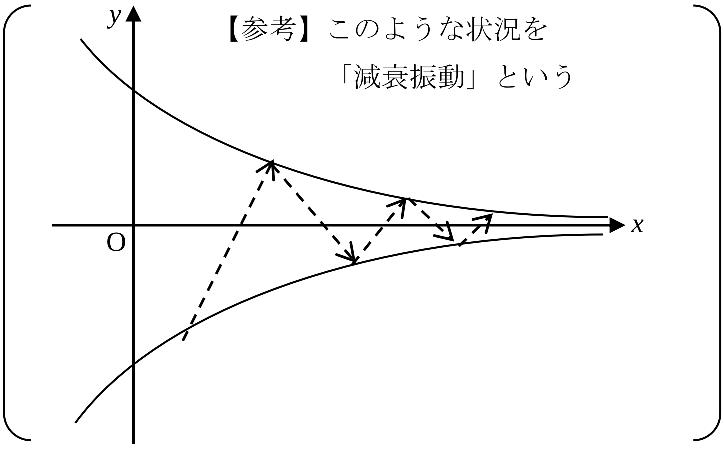
等比数列$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$：$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots$

項番号が大きくなればなるほど，0 に近づきます。

つまり　　$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots \quad \to \quad 0$

これを，極限の記号で表すと　$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$（収束）

[※「1 つの値」なので，収束]



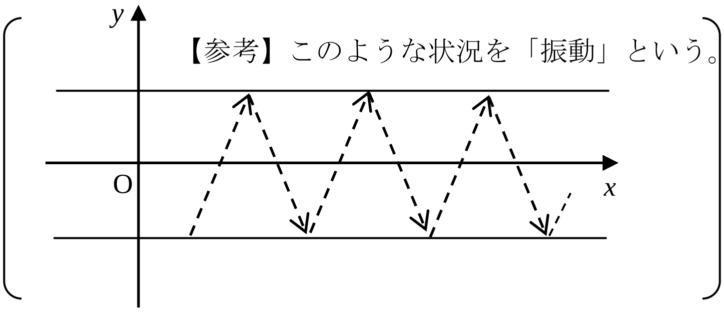
⑥ $r=-1$ の場合

等比数列 $\{(-1)^n\}$ ： $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$

-1 と１の２つの数を行ったり来たり(振動)しています。

よって，「１つの値」に定まらないので，収束ではない。

従って，極限の記号で表すと $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ は発散



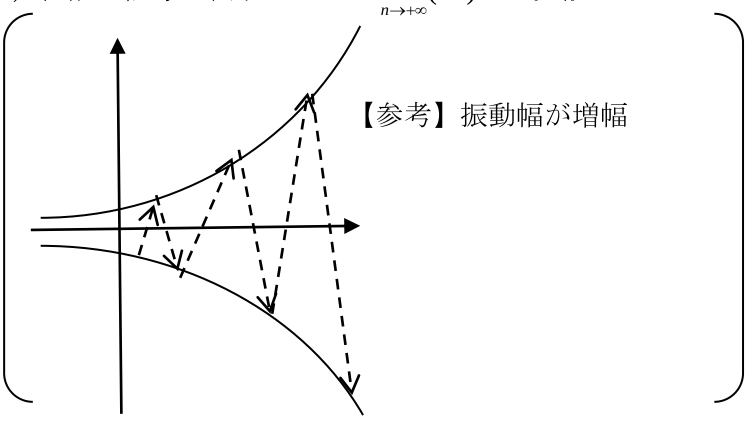
⑦ $r<-1$ の場合［具体的に， $r=-2$ で考える］

等比数列 $\left\{(-2)^n\right\}$ ： $-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ \cdots$

今まで見てきたように，公比 r が負の場合は，「振動」が起こります。

今回は，項番号が大きくなるほど，振動幅が増幅していきます。

従って，極限の記号で表すと $\lim_{n\to+\infty}(-2)^n$ は発散



等比数列の極限とは？

今までの内容をまとめると，３つに分類できます。

１）1 に収束する場合　[②]

２）0 に収束する場合　[③，④，⑤]

３）発散する場合　　[①，⑥，⑦]

［等比数列の極限］

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 1\text{（収束）}, & r=1 \text{ のとき} \\ 0\text{（収束）}, & -1<r<1 \text{ のとき} \\ \text{発散}, & r \leqq -1 \text{ 又は } r>1 \text{ のとき} \end{cases}$$

1.5 例題

例題　次の極限の収束・発散を調べよ。収束する場合は極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+1}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+4^n}$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{2^n+1}$

［解法＆解答］

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=0$（収束）　[理由(1)：$-1<r<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r^n=0$（収束）]

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$（発散）　[理由(2)：$r>1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r^n=+\infty$（発散）]

(3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)=\infty-\infty=?$[不定形]（※2 頁参照）

［解法］直接計算不能なので，式の変形が必要です。

⇒　絶対値$|r|$が一番大きいものでくくる

［解答］ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)=\lim_{n\to+\infty}3^n\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right\}=\boxed{+\infty}\times(\boxed{0}-1)=-\infty$

理由(2)　理由(1)

(4)～(6)は全て不定形[∞/∞]です。

[解法]分母・分子それぞれで，絶対値$|r|$が一番大きいものでくくる

(3)が不定形を処理する基本的な変形です。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+1^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{3^n\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}=\frac{1-0}{1+0}=1$ （収束）

（※$1^n=1$）

(5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right\}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\times\frac{\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right\}}=0\times\frac{1-0}{0+1}=0$ （収束）

(6) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{2^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{2^n\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\times\frac{\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}=+\infty\times\frac{1-0}{1+0}=+\infty$ （発散）

※(4)～(6) の相違点を確認しておいてください！

問 2.1　次の極限の収束・発散を調べよ。収束する場合は極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(5^n-4^n-3^n\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n-3^n}{4^n+3^n}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+1}{5^n+1}$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-4^n}{2^n+3^n}$

§２　数列の和の極限

2.1　等比級数

等比級数とは？

等比数列の和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a\cdot r^{k-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

の極限(無限和)を**等比級数**と言います。

［等比級数］　$\displaystyle S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a\cdot r^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}a\cdot r^{k-1}$

$$=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

（※どの表現でも対応できるようにしておきましょう。）

等比級数の収束・発散とは？

もう一度，復習です。（数列_第04回参照）

［等比数列の和］　$a \neq 0$　とする。

(1)　$r \neq 1$　のとき　$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$　※着目

(2)　$r = 1$　のとき　$a + a\cdot 1 + a \cdot 1^2 + \cdots + a \cdot 1^{n-1} = na$

(1)　のとき　$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & -1 < r < 1 \\ 発散 & r \leqq -1,\ r > 1 \end{cases}$

(2)　のとき　$\lim_{n\to+\infty} na = \infty \times a$　（発散）

［※$a > 0 \Rightarrow \infty \times a = +\infty$，　$a < 0 \Rightarrow \infty \times a = -\infty$］

以上のことを踏まえると，次の公式が導かれます。

［等比級数の収束・発散］　$a \neq 0$　とする。

(1)　$|r| < 1$　のとき　$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \dfrac{a}{1-r}$　（収束）

(2)　$|r| \geqq 1$　のとき　$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$　は発散

例題　次の等比級数の収束・発散を調べよ。収束する場合は和(極限値)を求めよ。

(1)　$2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots$　　(2)　$1 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} - \dfrac{27}{8} + \dfrac{81}{16} - \cdots$

［解答］(1)　初項 $a = 2$，公比 $r = \dfrac{1}{2}$ の等比級数　$\Rightarrow$　$|r| < 1$　より　収束

等比級数の和　$2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots = \dfrac{2}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{4}{2-1} = 4$

(2)　初項 $a = 1$，公比 $r = -\dfrac{3}{2}$ の等比級数　$\Rightarrow$　$|r| \geqq 1$　より　発散

問 2.2　次の等比級数の収束・発散を調べよ。収束する場合は和を求めよ。

(1)　$1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{27} + \dfrac{16}{81} - \cdots$　　(2)　$\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{9} + \dfrac{32}{27} + \cdots$