§５　数学的帰納法

5.1　数学的帰納法

数学的帰納法とは？

自然数 n に関する等式がある。
この等式が，すべての自然数について成り立つことを
次の**数学的帰納法**を用いて証明します。

数学的帰納法の証明方法

[1]　$n=1$　のとき

（[等式の]左辺）$=\boxed{\qquad}$

（[等式の]右辺）$=\boxed{\qquad}$

同じ値になることを確認する

よって，成り立つ。

[2]　$n=k$　のとき成り立つと仮定すると，

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ …①

与えられた等式を k の式で表現する

$n=k+1$ について考察する。
（[等式に] $n=k+1$ を代入した左辺）

$=\boxed{\qquad\qquad}$

⋮

（仮定①を利用し式を変形）

⋮

$=\boxed{\qquad\qquad}$

ここの作業が少し大変

＝（[等式に] $n=k+1$ を代入した右辺）

故に，$n=k+1$　のとき成り立つ。

[3]　従って，すべての自然数について成り立つ。

※長いですが，定形表現なので，言葉を省くことなくきちんと
書き写してください。

＝＝

【研究】数学的帰納法の考え方です。必ず一読ください。

もう少し，何故「すべての自然数について成り立つ」と言えるのかを説明します。
重要な言葉(表現)は，[1][2][3]の最初と最後です。
その部分だけを取り出すと，次のようになります。

[1] $n=1$ のとき　…　成り立つ。
[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，　…　$n=k+1$ のとき成り立つ。
[3] すべての自然数について成り立つ。

[2]で，順に $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ を代入すると

$n=1$ のとき成り立つと仮定すると，$n=2$ のとき成り立つ。
$n=2$ のとき成り立つと仮定すると，$n=3$ のとき成り立つ。
$n=3$ のとき成り立つと仮定すると，$n=4$ のとき成り立つ。
⋮　　　　　　　　　　　⋮

この時点では，あくまでも仮定であって，成り立っているかは不明です。
ところが，[1]で「$n=1$ のとき成り立つ」と断言しています。
よって，先ほどの[2]の文章は，次のように書き直されます。

$n=1$ のとき成り立つので，$n=2$ のときも成り立つ。

$n=2$ のとき成り立つので，$n=3$ のときも成り立つ。

$n=3$ のとき成り立つので，$n=4$ のときも成り立つ。
⋮　　　　　　　　　　　⋮
⋮　　　　　　　　　　　⋮

従って，[3]の結論「すべての自然数について成り立つ。」が導けることになります。
なんとなくですが，数学的帰納法の考え方がわかりますか？

[1]で，$n=1$ を
[2]で，$n=k$ と　次の数 $n=k+1$ の２つの間の関係を
取り扱っているところが，まさに漸化式と同じ考え方ですね。

【注意】帰納的定義（数列_第 01 回を参照）
漸化式において，a_1 から a_2，a_2 から a_3，a_3 から a_4，a_4 から a_5 $\cdots$ と
順次，数列を決定してしていく作業を，**帰納的定義**と呼ぶことにします。

よって，このような証明方法を，**数学的帰納法**と呼んでいます。

＝＝

例題　漸化式 $\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 \end{cases}$ を満たす数列の一般項は $S_n = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

証明すべき等式

証明）[1]　$n=1$　のとき

(左辺) $= \boxed{S_1 = 1}$

(右辺) $= \boxed{\dfrac{1}{4} \times 1^2 \times 2^2 = \dfrac{1}{4} \times 1 \times 4 = 1}$

よって，成り立つ。

[2]　$n=k$　のとき，成り立つと仮定すると，

$\boxed{S_k = \dfrac{1}{4}k^2(k+1)^2}$　…①

$n=k+1$ について考察する

（$n=k+1$ を代入した左辺）

$= S_{k+1} = S_k + (k+1)^3$　　※必ず記入する

$= \dfrac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3$　　（①より）

$= \dfrac{1}{4}(k+1)^2\{k^2 + 4(k+1)\}$

$= \dfrac{1}{4}(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)$

$= \dfrac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

=（$n=k+1$ を代入した左辺）　※確認せよ！

故に，$n=k+1$ のとき成り立つ。

[3]　従って，すべての自然数について成り立つ。

[※1 頁の数学的帰納法(定形表現)と同じであることを，確認してください！]

問 1.13　漸化式 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2} \end{cases}$ を満たす数列の一般項は $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$ であることを，

数学的帰納法を用いて証明せよ。

5.2　付録 A

一般項 a_n と第 n 部分和 S_n の関係を紹介します。

まずは，復習から

第 1 項(固定)から第 n 項までの和を第 n 部分和という。

［第 n 部分和］　$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

これから，次の公式を導くことができます。

［第 n 部分和から導かれる一般項］

$$a_n = \begin{cases} S_1 & , n=1 \text{ のとき} \\ S_n - S_{n-1} & , n \geqq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

証明）○ S_1 は第 1 項から第 1 項までの和であるから

明らかに　$S_1 = a_1$　が成り立つ。

○ S_{n-1} は第 1 項から第 $(n-1)$ までの和であるから

$$S_n = \boxed{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}} + a_n$$

$$= \boxed{S_{n-1}} + a_n$$

よって　$a_n = S_n - S_{n-1}$　が成り立つ。

【注意】 S_n へ形式的に $n=0$ を代入する。このとき

$S_0 = 0$　⇒　［公式］　$a_n = S_n - S_{n-1}$　$(n \geqq 1)$

とまとめることができます。

前頁の例題において，この「第 n 部分和から導かれる一般項」を適用する。

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \cdots ①$$

$$\Rightarrow \quad a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 = \frac{1}{4}n^2\{(n+1)^2 - (n-1)^2\}$$

$$= \frac{1}{4}n^2\{(n^2+2n+1) - (n^2-2n+1)\} = \frac{1}{4}n^2 \times 4n = n^3$$

つまり　$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$　…②　となるので，

①と②より，次の基本公式を導くことができます。

［基本公式(追加)］　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

5.3　付録B

今回の$\boxed{\text{演習}}$と$\boxed{\text{課題}}$に使われた漸化式から，直接計算により一般項を求めてみます。

$\boxed{\text{問題}}$　次の漸化式が表す一般項を求めよ。

(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n + 2 \end{cases}$

［解法］ a_n に一工夫して，新しい数列 b_n を考えます。このとき，
漸化式が $b_{n+1} = rb_n + c_n$ の形になると，次の公式が適用できます。

$$\boxed{\text{［公式］}\quad b_n = \left(b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{r^k}\right)r^{n-1}}$$

[※数列_第 05 回を参照]

［解答］(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，　$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2} \end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 2b_n + 1 \end{cases}$

$$\left[\begin{aligned} &\text{実際}\quad b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1 \\ &b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{a_n}{a_n+2}} = \frac{a_n + 2}{a_n} = 1 + \frac{2}{a_n} = 1 + 2b_n \end{aligned}\right]$$

よって　$b_n = \left\{1 + \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2^k}\right\} 2^{n-1} = \cdots = 2^n - 1$

（※各自，計算せよ！）

従って $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ より　$a_n = \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{2^n - 1}$

(2) $b_n = n\,a_n$ とおくと，　$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n + 2 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = b_n + 2(n+1) \end{cases}$

$$\left[\begin{aligned} &\text{実際}\quad b_1 = 1 \cdot a_1 = 1 \times 2 = 2 \\ &b_{n+1} = (n+1)\ a_{n+1} = (n+1)\cdot\left(\frac{n}{n+1}a_n + 2\right) \\ &\qquad = na_n + 2(n+1) = b_n + 2(n+1) \end{aligned}\right]$$

よって　$b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) = \cdots = n(n+1)$

（※各自，計算せよ！）

従って $b_n = n\,a_n$ より　$a_n = \dfrac{b_n}{n} = \dfrac{n(n+1)}{n} = n + 1$