§４　漸化式

4.1　漸化式

まずは，復習から

数列_第 01 回より

a_n と a_{n+1} の関係を表した式を，**漸化式**と呼ぶことにする。

尚，漸化式は「初項」とあわせて与えられることが多い。

等差数列を表す漸化式

数列_第 01 回より

［等差数列の漸化式］ $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$

この漸化式より導かれる等差数列の一般項は

［等差数列の一般項］ $a_n = a + (n-1)d$

等比数列を表す漸化式

数列_第 02 回より

［等比数列の漸化式］ $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = r\,a_n \end{cases}$

この漸化式より導かれる等差数列の一般項は

［等比数列の一般項］ $a_n = a \cdot r^{n-1}$

4.2　階差数列

階差数列とは？

与えられた数列$\{a_n\}$に対して，２項間の差

$b_n = a_{n+1} - a_n$

で求められる数列$\{b_n\}$を，**階差数列**という。

例）数列：1, 4, 9, 16, 25, … のとき　階差数列：3, 5, 7, 9, …

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1 & \\ & \} \; b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3 \\ a_2 = 4 & \\ & \} \; b_2 = a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5 \\ a_3 = 9 & \\ & \} \; b_3 = a_4 - a_3 = 16 - 9 = 7 \\ a_4 = 16 & \\ & \} \; b_4 = a_5 - a_4 = 25 - 16 = 9 \\ a_5 = 25 & \end{array}$$

[※階差数列を作るときは，後項から前項を引く！]

数列$\{a_n\}$と階差数列$\{b_n\}$の間には次の公式が成り立つ

［階差数列の公式］ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

証明）階差数列の定義より　$b_k = a_{k+1} - a_k$

[※都合上，nではなく，kに書き換えています]

$k=1$　のとき　$b_1 = \cancel{a_2} - a_1$

$k=2$　のとき　$b_2 = \cancel{a_3} - \cancel{a_2}$

$k=3$　のとき　$b_3 = \cancel{a_4} - \cancel{a_3}$

$k=4$　のとき　$b_4 = \cancel{a_5} - \cancel{a_4}$

$\vdots$　　　　$\vdots$

$\vdots$　　　　$\vdots$

$k=n-1$　のとき　$b_{n-1} = a_n - \cancel{a_{n-1}}$　（＋

【注意】
$(n-1)$個の和

$$\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} b_k = a_n - a_1$$ [※右辺は相殺]

従って，結果の公式を導くことができる　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

例題を解く前に復習です。

総和に関する公式[※数列_第04回を参照]

（n項までの和）　⇒　（$(n-1)$項までの和）

［基本公式］

(1) $\sum_{k=1}^{\boxed{n}} 1 = n$　　(1) $\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} 1 = n-1$

(2) $\sum_{k=1}^{\boxed{n}} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} k = \frac{1}{2}n(n-1)$

(3) $\sum_{k=1}^{\boxed{n}} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　(3) $\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} k^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

※n項までの和$\sum_{k=1}^{\boxed{n}}$を，$(n-1)$項までの和$\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}$にするためには

nに，$(n-1)$を代入します。実際，

(2) $\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}n(n-1)$

(3) $\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

（n 項までの和） $\Rightarrow$ （$(n-1)$ 項までの和）

［等差数列］ (4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{n}} a_k = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$ (4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} a_k = \frac{n-1}{2}\left(a_1 + a_{n-1}\right)$

［等比数列］ (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{n}} a\ r^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} a\ r^{k-1} = \frac{a(1-r^{n-1})}{1-r}$

［発展問題］ (6) 初項 a，公差 d の等差数列を a_n とする。

（n 項までの和） $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{n}} a_k\ r^{k-1} = \frac{1}{1-r}\left\{(a-d) + \frac{d(1-r^n)}{1-r} - a_n\ r^n\right\}$

$\Downarrow$

（$(n-1)$ 項までの和） $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} a_k\ r^{k-1} = \frac{1}{1-r}\left\{(a-d) + \frac{d(1-r^{n-1})}{1-r} - a_{n-1}\ r^{n-1}\right\}$

例題　数列 $\{a_n\}$ が，$\boxed{1}$, 4, 9, 16, 25, $\cdots$ であるとき，一般項を類推せよ。

［解説］一般項は $a_n = n^2$ であることが類推できます。

これを，階差数列を用いて求めます。

［解答］階差数列を $\{b_n\}$ とすると

3, 5, 7, 9, $\cdots$

これは，初項 3，公差 2 の等差数列であるから

$b_n = 3 + (n-1)\times 2 = 2n+1$

よって，階差数列の公式より，求める一般項は

$$a_n = \boxed{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{\boxed{k}} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$$ [※総和の記号の右側は k で表記]

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$ ：線形性

$$= 1 + 2\times\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)$$ ：基本公式

$$= 1 + (n^2 - n) + (n-1)$$

$$= n^2$$

（答）一般項　$a_n = n^2$

問 1.11　次の数列の一般項を類推せよ。

(1) 1, 5, 11, 19, 29, $\cdots$　　(2) 2, 5, 11, 23, 47, $\cdots$

4.3　定数変化法

定数変化法とは？

漸化式　$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = r\,a_n + b_n \end{cases}$　[a，r は定数，b_n は既知な数列]

で与えられた数列 $\{a_n\}$ から，一般項を求めるときに使われる
代表的な解法として，**定数変化法**を紹介する。

１）まず $b_n = 0$ の問題を考える。

つまり　$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = r\,a_n \end{cases}$　[但し，c は(未知な)定数]

これは，初項 c，公比 r の等比数列の漸化式だから

$$a_n = c\,r^{n-1}$$

２）このとき，定数 c を数列 c_n に置換える。**※定数変化法の由来**

つまり　$a_n = c_n\,r^{n-1}$　…①

３）まず，数列 $\{c_n\}$ の初期値を求める。

①に $n=1$ を代入すると　$a_1 = c_1\,r^0 = c_1$

最初の条件　$a_1 = a$　から　$c_1 = a_1 = a$ …②　が導かれる。

４）次に，①の n に $(n+1)$ を代入すると　$a_{n+1} = c_{n+1}\,r^n$　…③

最初の漸化式　$a_{n+1} = r\,a_n + b_n$　に①と③を代入する。

$$c_{n+1}r^n = r \times c_n\,r^{n-1} + b_n$$

$$c_{n+1}r^n = c_n\,r^n + b_n$$

$$(c_{n+1} - c_n)r^n = b_n$$

$$\therefore c_{n+1} - c_n = \frac{b_n}{r^n} \cdots ④$$

５）②と④より，数列 $\{c_n\}$ は，次の漸化式を満足する。

$$\begin{cases} c_1 = a \\ c_{n+1} - c_n = \dfrac{b_n}{r^n} \end{cases}$$

よって，階差数列の公式より，一般項 c_n を求めることができる。

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{r^k} = a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{r^k} \cdots ⑤$$

６）⑤の結果を，①に代入すると，求める一般項 a_n が導ける。

$$a_n = c_n\,r^{n-1} = \left(a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{r^k} \right) r^{n-1}$$

［公式］　漸化式 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = r\,a_n + b_n \end{cases}$ $\Rightarrow$ 一般項 $a_n = \left(a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{r^k}\right) r^{n-1}$

【注意】 $r = 1$ のときは，階差数列の公式となります。

漸化式 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$ $\Rightarrow$ 一般項 $a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

※階差数列： $a_{n+1} - a_n = b_n$ を意味している

例題　次の漸化式を満たす数列の一般項を求めよ。

(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 5a_n + 3^{n-1} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n \end{cases}$

［解答］(1) $r = 5,\ b_n = 3^{n-1}$ [等比数列]の場合

$$a_n = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^{k-1}}{5^k}\right) \times 5^{n-1} = \left\{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\right\} \times 5^{n-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{3}{5}}\right] \times 5^{n-1} = \left[1 + \frac{\frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{\frac{2}{5}}\right] \times 5^{n-1}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}\right] \times 5^{n-1} = \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\} \times 5^{n-1}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{3 \cdot 5^{n-1} - 3^{n-1}}{2}$$

※コメント

①途中式 $\frac{3^{k-1}}{5^k} = \frac{1 \times 3^{k-1}}{5 \times 5^{k-1}} = \frac{1}{5} \times \frac{3^{k-1}}{5^{k-1}} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\boxed{k-1}}$

一致する

②等比数列の和 $\sum_{k=1}^{n} a \cdot r^{\boxed{k-1}} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

ここが重要！

(2) $r=2,\ b_n=n$ [等差数列]の場合

ここが重要！

$$a_n=\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}\right)\times 2^{n-1}=\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}\times 2^{n-1}=\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{k-1}}\right\}\times 2^{n-1}$$

※等差数列 $\dfrac{n}{2}$ は $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{2},\ \dfrac{5}{2},\ \cdots$ を表しています

つまり，初項は$\dfrac{1}{2}$で，公差は$\dfrac{1}{2}$となります。

よって，発展問題の公式を適用すると

$$a_n=\left[1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right]\times 2^{n-1}$$

$$=\left[1+2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right]\times 2^{n-1}$$

$$=\left\{1+2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\times 2^{n-1}$$

$$=\left\{3-(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\times 2^{n-1}$$

$$=3\cdot 2^{n-1}-(n+1)$$

問 1.12 次の漸化式を満たす数列の一般項を求めよ。

(1) $\begin{cases}a_1=0\\ a_{n+1}=a_n+n^2\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=3a_n+2\end{cases}$