## 2.5　等比数列の和

等比数列の和とは？

初項 $a$，公比 $r$　の等比数列

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots, ar^{n-3},\ ar^{n-2},\ ar^{n-1},\ \cdots$$

までの，第 $n$ 項までの和(第 $n$ 部分和) $S_n$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

は，次の公式で求めることができる。

［等比数列の和］　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a \cdot r^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$　（$r \neq 1$）

（※4 頁の【注意】も参照のこと）

証明)「和 $S_n$」と「和 $S_n$ に公比 $r$ を掛けた $rS_n$」の差を考える。

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \quad (-$$

$$S_n - rS_n = a \qquad \boxed{\text{相殺される}} \qquad - ar^n$$

※公比 $r$ を掛け 1 個ずらす

故に　　$(1-r)S_n = a(1-r^n)$

$$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

また，分母分子に $(-1)$ を掛けて，引く順番を入れ替えることも可能。

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\ \frac{\times(-1)}{\times(-1)} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

例題　次の等比数列の和を答えよ。

(1) $3-6+12-24+\cdots+(\text{第}n\text{項})$

(2) $3-6+12-24+\cdots+(\text{第}7\text{項})$

(3) $3-6+12-24+\cdots-1536$

［解法］次の 3 つの項目を調べて，公式を適用する。

①初項　②公比　③項数

［解答］(1) ①初項　$a=3$　　②公比　$r=-2$　　③項数　$n$

従って，求める和は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = \frac{3\{1-(-2)^n\}}{3} = 1-(-2)^n$$

[※注意：公比が負のときは( )を用いて表記！(TEXT_02 の 3 頁を再読)]

(2) ①初項　$a=3$　②公比　$r=-2$　③項数　$n=7$

従って，求める和は

$$S_7=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{3\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)}=\frac{3\{1-(-2)^7\}}{3}=1-(-128)=129$$

(3) ①初項　$a=3$　②公比　$r=-2$

③項数　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}=-1536$　より　$(-2)^{n-1}=-512=(-2)^9$

よって　$n-1=9$　$\therefore n=10$

従って，求める和は

$$S_{10}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{3\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=\frac{3\{1-(-2)^{10}\}}{3}=1-1024=-1023$$

[※必要に応じて，問 1.4，問 1.8 を参照せよ！]

**問 1.9**　次の等比数列の和を答えよ。

(1) $1+3+9+27+81+\cdots+(\text{第}n\text{項})$

(2) $1+2+4+8+16+\cdots+(\text{第}10\text{項})$

(3) $2-6+18-54+\cdots-4374$ [※課題に出題]

## 2.6　発展問題

ここでは発展問題を扱います

難しいですか？

難しいです。頑張ってついてきてきださい。

ここでは，前半が初項 $a$，公差 $d$ の等差数列　$a_n=a+(n-1)d$

[例：4, 7, 10, 13, 16, …, $3n+1$, …（$a=4,\ d=3$）]

後半が初項 1，公比 $r$ の等比数列　$b_n=r^{n-1}$

[例：1, 2, 4, 8, 16, …, $2^{n-1}$, …　（$r=2$）]

の積からなる数列 $\{a_n\cdot b_n\}$

$+d$　　$+d$　　$+d$　：公差

$$\underline{a}\cdot\underline{\underline{1}},\ (\underline{a+d})\cdot\underline{\underline{r}},\ (\underline{a+2d})\cdot\underline{\underline{r^2}},\ (\underline{a+3d})\cdot\underline{\underline{r^3}},\ \cdots\cdots,\ \{\underline{a+(n-1)d}\}\cdot\underline{\underline{r^{n-1}}},\ \cdots$$

$\times r$　　$\times r$　　$\times r$　：公比

[例：$4\cdot1,\ 7\cdot2,\ 10\cdot4,\ 13\cdot8,\ 16\cdot16,\ \cdots,\ (3n+1)\cdot2^{n-1},\ \cdots$]

の和　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot r^{k-1}$　を取り扱います。

$$S_n=a\cdot1+(a+d)\cdot r+(a+2d)\cdot r^2+(a+3d)\cdot r^3+\cdots+\{a+(n-1)d\}\cdot r^{n-1}$$

[例：$S_n=4\cdot1+7\cdot2+10\cdot4+13\cdot8+16\cdot16+\cdots+(3n+1)\cdot2^{n-1}$]

解法は，等比数列の和の証明と同じ手法をとります。

$$\begin{array}{rl}
S_n = & a\cdot 1 + (a+d)\cdot r + (a+2d)\cdot r^2 + (a+3d)\cdot r^3 + \cdots + \{a+(n-1)d\}\cdot r^{n-1} \\
-)\ rS_n = & \qquad\quad a\cdot r + (a+\ d)\cdot r^2 + (a+2d)\cdot r^3 + \cdots + \{a+(n-2)d\}\cdot r^{n-1} + \{a+(n-1)d\}\cdot r^n \\
\hline
(1-r)S_n = & a\cdot 1 + \quad d\cdot r + \quad d\cdot r^2 + \quad d\cdot r^3 + \cdots + \quad d\cdot r^{n-1} - \{a+(n-1)d\}\cdot r^n
\end{array}$$

[※等比数列は相殺されましたが，今回は消えません]

$$\left(\begin{array}{rl}
\text{例：}\quad S_n = & 4\cdot 1 + 7\cdot 2 + 10\cdot 4 + 13\cdot 8 + 16\cdot 16 + \cdots + (3n+1)\cdot 2^{n-1} \\
-)\ 2S_n = & \qquad 4\cdot 2 + \ 7\cdot 4 + 10\cdot 8 + 13\cdot 16 + \cdots + (3n-2)\cdot 2^{n-1} + (3n+1)\cdot 2^n \\
\hline
-S_n = & 4\cdot 1 + 3\cdot 2 + \ 3\cdot 4 + \ 3\cdot 8 + \ 3\cdot 16 + \cdots + \qquad 3\cdot 2^{n-1} - (3n+1)\cdot 2^n
\end{array}\right)$$

Point：右辺に，公差 $d$ を引いて，公差 $d$ を足します。

$$(1-r)S_n = a \underline{\underline{-d+}} d + d\cdot r + d\cdot r^2 + d\cdot r^3 + \cdots + d\cdot r^{n-1} - \{a+(n-1)d\}\cdot r^n$$

よって　$(1-r)S_n = (a-d) + d(\ 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}\ ) - \{a+(n-1)d\}\cdot r^n$

（※相殺で消えなかった部分の(　)内は
初項 1，公比 $r$ の等比数列の和）

$$(1-r)S_n = (a-d) + d\times\frac{1-r^n}{1-r} - \{a+(n-1)d\}\cdot r^n$$

$$\boxed{\therefore S_n = \frac{1}{1-r}\left\{(a-d) + d\times\frac{1-r^n}{1-r} - \{a+(n-1)d\}\cdot r^n\right\}}$$

←最終結果

例：$-S_n = 4\ \underline{\underline{-3+(3}}\ + 3\cdot 2 + 3\cdot 4 + 3\cdot 8 + 3\cdot 16 + \cdots + 3\cdot 2^{n-1}) - (3n+1)\cdot 2^n$

$$= 1 + 3(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{n-1}) - (3n+1)\cdot 2^n$$

$$= 1 + 3\cdot\frac{1-2^n}{1-2} - (3n+1)\cdot 2^n$$

従って　$S_n = -1 - 3\cdot\dfrac{1-2^n}{1-2} + (3n+1)\cdot 2^n$

$$= -1 + 3\cdot(1-2^n) + (3n+1)\cdot 2^n$$

$$= -1 + 3 - 3\cdot 2^n + (3n+1)\cdot 2^n$$

$$= 2 + \{-3 + (3n+1)\}\cdot 2^n$$

$$= 2 + (3n-2)\cdot 2^n$$

［公式］初項 $a$，公差 $d$ の等差数列を $a_n$ とする。

このとき，$a_n$ と「初項 1，公比 $r$ の等比数列」の積からなる

数列：$a_1\cdot 1,\ a_2\cdot r,\ a_3\cdot r^2,\ \cdots,\ a_n\cdot r^{n-1},\ \cdots$

の第 $n$ 部分和 $S_n$ は，次式で求まる。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n\cdot r^{n-1}=a_1\cdot 1,+a_2\cdot r+a_3\cdot r^2+\cdots+a_n\cdot r^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-r}\left\{(a-d)+d\cdot\boxed{\frac{1-r^n}{1-r}}-\boxed{a_n}\cdot r^n\right\}$$

例題　和　$S_n=4\cdot 1+7\cdot 2+10\cdot 4+13\cdot 8+16\cdot 16+\cdots+(3n+1)\cdot 2^{n-1}$　を求めよ。

［解答］前半は，初項 $a=4$，公差 $d=3$ の等差数列で，一般項は

$$\boxed{a_n}=4+(n-1)\times 3=3n+1$$

後半は，初項1，公比 $r=2$ の等比数列で，その和は

$$\boxed{\frac{1-r^n}{1-r}}=\frac{r^n-1}{r-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

従って，求める和は

$$S_n=\frac{1}{1-2}\left\{(4-3)+3\cdot(2^n-1)-(3n+1)\cdot 2^n\right\}$$

いま，$2^n=X$　とおくと

$$\begin{aligned}S_n&=-\left\{1+3(X-1)-(3n+1)X\right\}\\&=-1-3X+3+(3n+1)X\\&=2+(3n-2)X\\&=2+(3n-2)\cdot 2^n\qquad（X=2^n\ より）\end{aligned}$$

課題　和　$S_n=1\cdot 1-3\cdot 3+5\cdot 9-7\cdot 27+9\cdot 81+\cdots+(2n-1)\cdot(-3)^{n-1}$　を求めよ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【注意】$r=1$ のときの等比数列の和は　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a\cdot 1^n=a\sum_{k=1}^{n}1=an$　（［公式］$\sum_{k=1}^{n}1=n$）

で対応できるため，本 TEXT では，等比数列の和を考えるとき，$r=1$ は除外する。

［等比数列の和］　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a\cdot r^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$　（$r\neq 1$）

# § 3　数列の和（応用）

## 3.1　部分分数分解

まずは，復習から

和に関する公式を再確認しておきます。

［基本公式］　(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = 1+1+1+1+1+\cdots+1 = n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+5+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

［等差数列］　(4) $a_n = a+(n-1)d$　［初項 $a$，公差 $d$］のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = \boxed{a_1} + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + \boxed{a_n} = \frac{n}{2}\left(\boxed{a_1} + \boxed{a_n}\right)$$

［等比数列］　(5) $a_n = a \cdot r^{n-1}$　［初項 $a$，公比 $r$］のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a \cdot r^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

部分分数分解とは？

分数の和の計算において，「通分」の逆作業を「部分分数分解」と呼びます。

例）$$\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+3} \underset{\text{[部分分数分解]}}{\overset{\text{[通分]}}{\rightleftarrows}} \frac{3n+5}{(n+1)(n+3)}$$

[通分]　$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{n+1}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{n+3}} = \frac{(n+3)+2(n+1)}{(n+1)(n+3)} = \frac{3n+5}{(n+1)(n+1)(n+3)}$$

(※通分は，クロスして計算するのが簡便)

[部分分数分解]　$\displaystyle\frac{3n+5}{(n+1)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3}$　とおくと

$$3n+5 = A(n+3) + B(n+1)$$

恒等式より　$n=-1$　を代入　$2 = 2A$　　$\therefore A = 1$

$n=-3$　を代入　$-4 = -2B$　　$\therefore B = 2$

例題　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。

［解法］①部分分数分解を行う。　②「相殺」の手法を用いる。

［解答］①一般項($\sum$ の右側部分)を，部分分数分解する。

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}\quad \text{とおくと}\quad 1=A(k+1)+Bk$$

恒等式より　$k=0$ を代入　$1=A$　$\therefore A=1$

　　　　　　$k=-1$ を代入　$1=-B$　$\therefore B=-1$

よって　$\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

②相殺する

$k=1$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}$

$k=2$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{2\cdot 3}=\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}$

$k=3$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{3\cdot 4}=\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}$

※最初の３項を必ず書く！

⋮　　　　⋮

$k=n$ のとき　$\displaystyle\boxed{\frac{1}{n(n+1)}}=\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}$　（＋

$$\sum_{k=1}^{n}\boxed{\frac{1}{k(k+1)}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$$

※一般項(但し，$\sum$ の右側は $k$ を使用！)

従って，求める和は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

**問 1.10**　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ を求めよ。

## 3.2　有理化

分母の有理化とは？

分母に根号($\sqrt{\ }$ )がある式を
分母に根号がない式に変換する作業を「分母の有理化」という。

例）$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

例題　次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

［解法］①有理化を行う。　②「相殺」の手法を用いる。

［解答］①一般項($\sum$ の右側部分)を，有理化する。

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$

$$=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(2k+1)-(2k-1)}=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}$$

従って　$\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right)$

②相殺する

$k=1$ のとき　$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)$

$k=2$ のとき　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

$k=3$ のとき　$\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$

⋮　　　　　⋮

$k=n$ のとき　$\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$　（＋

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{1}\right)$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$$

課題　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ を求めよ。