2.3　基本公式

基本公式とは？

今回は，総和の記号に関する基本公式を３つ準備します。

［基本公式］　(1) $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

証明）(1) 一般項 $a_n = 1$ である数列を考える。

この数列は，数列番号 n によって値が変わらない数列です。

数列：1, 1, 1, 1, 1, …, 1, …

よって，第 n 部分和は

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+1+1+\cdots+1}_{n\text{個}} = n$$

(2) 一般項 $a_n = n$ である数列を考える。

数列：1, 2, 3, …, $n-2$, $n-1$, n, …

いま，$S_n = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$ とおく。

このとき，次の等式も明らかに成り立つ。

$$S_n = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$$

よって

$$\begin{array}{rl} & S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \quad \text{[正順]} \\ +) & S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \quad \text{[逆順]} \\ \hline & 2S_n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n\text{個}} \end{array}$$

$$\therefore 2S_n = n(n+1)$$

従って

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n = S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(3) 3 乗に関する展開公式より

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$\therefore\ (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 \cdots ①$$

なる関係式を得ることができる。

①において

$$
\begin{array}{lrcl}
k=1\text{のとき} & \cancel{2^3} - 1^3 & = & 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1 \\
k=2\text{のとき} & \cancel{3^3} - \cancel{2^3} & = & 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1 \\
k=3\text{のとき} & \cancel{4^3} - \cancel{3^3} & = & 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1 \\
k=4\text{のとき} & \cancel{5^3} - \cancel{4^3} & = & 3\times 4^2 + 3\times 4 + 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\
k=n\text{のとき} & (n+1)^3 - \cancel{n^3} & = & 3\times n^2 + 3\times n + 1 \qquad (+ \\
\hline
 & (n+1)^3 - 1^3 & = & 3\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2} + 3\boxed{\sum_{k=1}^{n} k} + \boxed{\sum_{k=1}^{n} 1}
\end{array}
$$

よって，基本公式(1)と(2)[証明済]を適用すると

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2} + 3\times\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)} + \boxed{n}$$

故に

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n$$

$$= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \left(= \frac{2}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \right)$$

$$= \frac{1}{2}n(2n^2 + 3n + 1)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

たすき掛け

$$
\begin{array}{llll}
1 & 1 & \to & 2 \\
2 & 1 & \to & 1 \quad (+ \\
\hline
 & & & 3
\end{array}
$$

従って，次の結果が得られる。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

線形性とは？

次のような性質を**線形性**と言います。

［線形性］ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(pk^s+qk^t)=p\sum_{k=1}^{n}k^s+q\sum_{k=1}^{n}k^t$

（但し， p，q，s，t は定数）

説明） $p=3,\ q=-1,\ s=2,\ t=1$ として，具体的に示す。

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)$$

$$=(\underline{3\times1^2}\ \underline{\underline{-1}})+(\underline{3\times2^2}\ \underline{\underline{-2}})+(\underline{3\times3^2}\ \underline{\underline{-3}})+\cdots+(\underline{3\times n^2}\ \underline{\underline{-n}})$$

$$=\underline{3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}\ \underline{\underline{-(1+2+3+\cdots+n)}}$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$

例題　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2)$ を求めよ。

［解法］「線形性」と「基本公式」を用いて解く。

［解答］ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2)=\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2}-3\boxed{\sum_{k=1}^{n}k}+2\boxed{\sum_{k=1}^{n}1}$ ：線形性

（※1 は k^0 を意味している。）

$$=\boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}-3\times\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}+2\times\boxed{n}$$ ：基本公式

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)+2n\left(=\frac{1}{\boxed{6}}\boxed{n}(n+1)(2n+1)-\frac{9}{\boxed{6}}\boxed{n}(n+1)+\frac{12}{\boxed{6}}\boxed{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\boxed{6}}\boxed{n}\{(n+1)(2n+1)-9(n+1)+12\}$$ ：共通因子でくくる

$$=\frac{1}{6}n\{(2n^2+3n+1)-(9n+9)+12\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2-6n+4)=\frac{1}{6}n\times2(n^2-3n+2)=\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

問 1.7　次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$　　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

2.4　等差数列の和

等差数列の和とは？

初項 a，公差 d　の等差数列

$a,\ a+d,\ \cdots, a+(n-2)d,\ a+(n-1)d,\ \cdots$

までの，第 n 項までの和(第 n 部分和) S_n

$$S_n = \boxed{\{a\}} + \{a+d\} + \cdots + \{a+(n-2)d\} + \boxed{\{a+(n-1)d\}}$$

初項(最初の項)　　　　　　　　末項(最後の項)

は，次の公式で求めることができる。

［等差数列の和］　$S_n = \dfrac{n}{2}\left(\boxed{初項} + \boxed{末項}\right)$

証明）基本公式(2)の証明と同じ手法を行う。

$$\begin{array}{rl} & S_n = \{a\} + \{a+d\} + \cdots + \{a+(n-2)d\} + \{a+(n-1)d\} \quad [正順] \\ +) & S_n = \{a+(n-1)d\} + \{a+(n-2)d\} + \cdots + \{a+d\} + \{a\} \quad [逆順] \\ \hline & 2S_n = \{2a+(n-1)d\} + \{2a+(n-1)d\} + \cdots + \{2a+(n-1)d\} + \{2a+(n-1)d\} \end{array}$$

$$\therefore 2S_n = n\{2a+(n-1)d\}$$

従って

$\boxed{初項} + \boxed{末項} = \{a\} + \{a+(n-1)d\} = 2a+(n-1)d$

であることに注意すると，結果が得られる

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} = \frac{n}{2}\left(\boxed{初項} + \boxed{末項}\right)$$

例題　次の等差数列の和を答えよ。

(1) $1+4+7+\cdots+(第n項)$

(2) $1+4+7+\cdots+(第10項)$

(3) $1+4+7+\cdots+82$

［解法］次の 3 つの項目を調べて，公式を適用する。

①初項　②末項　③項数(n)

［解答］(1) ①初項　$a=1$

②末項　今回は一般項　$a_n = a+(n-1)d = 1+(n-1)\times 3 = 3n-2$

[※与えられた数列は，初項 $a=1$，公差 $d=3$ の等差数列]

③項数　$\boxed{n}$

従って，求める和は $S_{\boxed{n}} = \dfrac{n}{2}\{1+(3n-2)\} = \dfrac{1}{2}n(3n-1)$

(2)①初項　$a=1$

②末項　今回は第 10 項　$a_{10}=a+(n-1)d=1+9\times 3=28$

[※与えられた数列は，初項 $a=1$，公差 $d=3$ の等差数列より]

③項数　$n=\boxed{10}$

従って，求める和は　$S_{\boxed{10}}=\dfrac{10}{2}(1+28)=5\times 29=145$

(3)①初項　$a=1$

②末項　$b=82$

③項数[問 1.2(4)を参照せよ]

与えられた数列は，初項 $a=1$，公差 $d=3$ の等差数列より

一般項は　$a_n=a+(n-1)d=1+(n-1)\times 3=3n-2$

よって，末項の値より　$3n-2=82$

$3n=84$　　$\therefore n=\boxed{28}$

[※つまり，末項 82 は第 28 項目の数]

従って，求める和は　$S_{\boxed{28}}=\dfrac{28}{2}(1+82)=14\times 83=1162$

問 1.8　次の等差数列の和を求めよ。

(1) $-3+1+5+\cdots+$(第n項)

(2) $1+3+5+\cdots+$(第13項)

(3) $56+\cdots+1-4-9$

＝＝

【研究】

初項 a，公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n=a+(n-1)d=dn+(a-d)=pn+q\quad（但し\ p=d,\ q=a-d）$$

と書き直すことができます。つまり，

$$a_n=pn+q\quad（p,\ q\ は定数）$$

で表される一般項は，等差数列を表しています。

これを踏まえて，次の問題を考えてみましょう。

$\boxed{\text{演習}}$　和 $\displaystyle\sum_{k=5}^{12}(2k+3)$ を求めよ。[解答は次の頁にあります]

今回は，答えがきちんと確認できるように項数を少なく設定してあります。

①まずは，直接計算してみましょう。[前回の内容]

$$\sum_{k=5}^{12}(2k+3)=13+15+17+19+21+23+25+27=160$$

②基本公式を使う。

基本公式の弱点は，開始番号が $k=1$ であること。

よって [1～12 の和]＝[1～4 の和] ＋ [5～12 の和] より

[5～12 の和]＝[1～12 の和] － [1～4 の和]

つまり
$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{12}(2k+3)&=2\sum_{k=5}^{12}k+3\sum_{k=5}^{12}1\\&=2\left(\sum_{k=1}^{12}k-\sum_{k=1}^{4}k\right)+3\left(\sum_{k=1}^{12}1-\sum_{k=1}^{4}1\right)\\&=2\left(\frac{1}{2}\times12\times13-\frac{1}{2}\times4\times5\right)+3(12-4)\\&=2(78-10)+24=136+24=160\end{aligned}$$

【参考】今回は，次の基本公式に， $n=4,\ 12$ を代入している。

［基本公式］ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{n}}1=\boxed{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{n}}k=\frac{1}{2}\boxed{n}(\boxed{n}+1)$

③等差数列の和の公式を用いる

一般項 $a_k=2k+3$

初項[開始番号($k=5$)] $a_5=13$

末項[終了番号($k=12$)] $a_{12}=27$

項数（＝[終了番号]－[開始番号]＋1） $n=12-5+1=8$

従って，求める和は $S_8=\dfrac{8}{2}(13+27)=4\times40=160$

$$\sum_{k=5}^{12}(2k+3)=\overbrace{\underset{\uparrow\,\text{初項}}{\boxed{13}}+15+17+19+21+23+25+\underset{\uparrow\,\text{末項}}{\boxed{27}}}^{\text{項数}\ n=8}=160$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝