1.5　等比数列

等比数列とは？

初項aに，定数rを次から次に掛けて作られる数列を，**等比数列**という。
特に，次から次に掛けられる定数rを，**公比**と言います。

［等比数列］　$\boxed{a},\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \cdots$

初項　$\times r$　$\times r$　$\times r$　$\times r$　公比

例）初項$a=2$，公比$r=3$　の等差数列について
　最初の５項は　　　　数列： 2, 6, 18, 54, 162, …

※等差数列との比較［第１回を参照］
初項aに，定数dを次から次に加えて作られる数列を，**等差数列**という。
特に，次から次に加えられる定数dを，**公差**と言います。

［等差数列］　$\boxed{a},\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \cdots$

初項　$+d$　$+d$　$+d$　$+d$　公差

例）初項$a=2$，公差$d=3$　の等差数列について
　最初の５項は　　　　数列： 2, 5, 8, 11, 14, …

等比数列の内容を，漸化式で表すと

［等比数列の漸化式］　$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = r\,a_n \end{cases}$

【参考】　$\cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots$

$\times r$

このとき，次の等差数列の一般項に関する公式を導出することができる。

［等比数列の一般項］
　初項a，公比rの等比数列の一般項は

$$a_n = a\,r^{n-1}$$

証明）等比数列の漸化式 $\begin{cases} a_1 = a & \cdots① \\ a_{n+1} = r\,a_n & \cdots② \end{cases}$ から，導出します。

②より　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$

このとき　$n=1$ のとき　$\dfrac{a_2}{a_1} = r$

$n=2$ のとき　$\dfrac{a_3}{a_2} = r$

$n=3$ のとき　$\dfrac{a_4}{a_3} = r$

$n=4$ のとき　$\dfrac{a_5}{a_4} = r$

⋮　　⋮

⋮　　⋮

※ n に $n-1$ を代入するという意味です。

$n=n-1$ のとき　$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = r$　（×

$(n-1)$ 個の積

全ての項を掛け合わせる　$\cancel{\dfrac{a_2}{a_1}} \times \cancel{\dfrac{a_3}{a_2}} \times \cancel{\dfrac{a_4}{a_3}} \times \cancel{\dfrac{a_5}{a_4}} \times \cdots \cdots \times \cancel{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}} = r^{n-1}$

※左辺は「相殺（そうさい）」されて，簡単になります

「相殺」とは，物事の相反する要素や競合する要素が、互いに差し引きされること

①より　$a_1 = a$ だから　$\dfrac{a_n}{a} = r^{n-1}$

$\therefore a_n = a\,r^{\boxed{n-1}}$

ここに着目

※等差数列の一般項との比較

［等差数列の一般項］

初項 a，公差 d の等差数列の一般項は

$a_n = a + \boxed{(n-1)}\,d$

1.6　例題

問題を解く前に幾つかの注意事項を列記します。必ず読んでください。
後半は，特別な公比数列の表記法に関する注意です。

【注意事項】

(1) 積記号として　「×」と「·」 を用いる。

［積記号］　$ab = a \times b = a \cdot b$

(2) 公比が負の数のときは，必ず括弧( )を用いて表記せよ！[重要]

例）$a = 3,\ r = -5$ の等比数列の一般項

［正］$a_n = 3 \cdot (-5)^{n-1}$　　　［誤］　$a_n = 3 \cdot -5^{n-1}$

(3) 次の表記法の違いを認識せよ！！

-5^{n-1} は　$-(5 \times 5 \times 5 \times \cdots \times 5)$　[5 の $(n-1)$ 乗に相当する負の数]

$(-5)^{n-1}$ は $(-5) \times (-5) \times (-5) \times \cdots \times (-5)$　[単に (-5) の $(n-1)$ 乗]

(4) 次の様な計算は，絶対にしない！！！

［誤］$a_n = 3 \cdot (-5)^{n-1} = -15^{n-1}$　又は　［誤］$a_n = 3 \cdot (-5)^{n-1} = (-15)^{n-1}$

実際，$a_n = 3 \cdot (-5)^{n-1} = \underline{\underline{3 \times (-5)}} \times (-5) \times (-5) \times \cdots \times (-5)$

※(-15) になるのはここだけ

を短縮した表記であり

$-15^{n-1} = -(15 \times 15 \times 15 \times \cdots \times 15)$

又は　$(-15)^{n-1} = (-15) \times (-15) \times (-15) \times \cdots \times (-15)$

とは等しい表現ではありません。

【特別な場合の表記法】

初項 a，公比 r の等比数列の一般項は　　$a_n = a\, r^{n-1}$

(1) 初項 $a = 1$ の場合　　一般項は　$a_n = 1 \times r^{n-1} = r^{n-1}$

(2) 初項 $a = -1$ の場合　　一般項は　$a_n = (-1) \times r^{n-1} = -r^{n-1}$

(3) 初項 $a = r$ の場合　　一般項は　$a_n = r \times r^{n-1} = r^n$

例題　等比数列 3, −6, 12, −24, 48, ⋯ について，次の問いに答えよ。

(1) 初項 a と公比 r を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) 第 10 項 a_{10} を求めよ。

(4) −384 は第何項の数か求めよ。

［解答］(1) $a=3$， $r=-2$

(2) $a_n = a\,r^{n-1} = 3\cdot(-2)^{n-1}$

(3) (2)より　$n=10$ のとき　$a_{10} = 3\cdot(-2)^9 = 3\times(-512) = -1536$

(4) (2)より　$3\cdot(-2)^{n-1} = -384$

$$(-2)^{n-1} = -128 = (-2)^7$$

[※指数方程式：解法は底$(今回は(-2))$をそろえる]

よって　$n-1=7$　　$\therefore n=8$　　（答）第８項

問 1.4　等比数列 1, 3, 9, 27, 81, ⋯ について，次の問いに答えよ。

(1) 初項 a と公比 r を求めよ。　　(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) 第８項 a_8 を求めよ。　　(4) 19683 は第何項の数か求めよ。

例題　第３項が1，第６項が8である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

［解法］等差数列の一般項 $a_n = a\,r^{n-1}$ に問題内容を組み込み，

連立方程式を解きます。

［解答］問題より $\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_6 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ar^2 = 1 \cdots ① \\ ar^5 = 8 \cdots ② \end{cases}$

[※ $n=3$ と $n=6$ を代入しています]

$\dfrac{②}{①}$ より　$\dfrac{\boxed{ar^5}}{\boxed{ar^2}} = \dfrac{8}{1}$　$\Rightarrow$　$r^3 = 8$　　$\therefore r = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

①より　$4a = 1$　　$\therefore a = \dfrac{1}{4}$　　（答）初項 $a=\dfrac{1}{4}$，公比 $r=2$

問 1.5　第２項が6，第４項が24である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

【復習】(1) $r^n = R$ の解は $r = \begin{cases} \sqrt[n]{R} & ,\ n\ \textbf{が奇数} \\ \pm\sqrt[n]{R} & ,\ n\ \textbf{が偶数}\ (\textbf{但し}\ R>0) \end{cases}$　$\boxed{更に}$

(2) [**累乗根**の性質] n が奇数のとき　$\sqrt[n]{-R} = -\sqrt[n]{R}$

§２　数列の和

2.1　数列の和

数列の和とは？

ここでは，数列 $\underline{\underline{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots,\ a_n}},\ \cdots$ の

第１項から第 n 項までの和を

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n$$

を考えます。この総和を**第 n 部分和**といい，記号 S_n で表します

［第 n 部分和］　$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n$

2.2　総和の記号

総和の記号とは？

「第 n 部分和」を表す記号は S_n の他に

ギリシア文字の大文字「シグマ」を用いる表記方があります。

［第 n 部分和］　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n$

この記号 $\sum$ を，**総和の記号**と呼びます。

【注意事項】もう少し，総和の記号の説明を書き足します。

(1) $\sum_{\boxed{k}=1}^{n}a_{\boxed{k}}$　　(※この TEXT では k を使用します)

この部分の文字をそろえる！

(2) $\sum_{k=\boxed{1}}^{\boxed{n}}a_k$　　下側の数字が「開始番号」で上側の数字が「終了番号」

(3) つまり，総和の記号 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ は，記号 $\sum_{k=1}^{n}$ の右側の a_k の k の部分が

「開始番号」から「終了番号」まで変化し(今回は１から n まで),

それらの項の総和を表します。

$$\sum_{k=1}^{n}a_{\boxed{k}}=a_{\boxed{1}}+a_{\boxed{2}}+a_{\boxed{3}}+a_{\boxed{4}}+a_{\boxed{5}}+\cdots+a_{\boxed{n}}$$

第 n 部分和 S_n と総和の記号 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ の違いは？

第 n 部分和 S_n は，始まりの第 1 項が固定されています。
終わりの第 n 項が自由に動かすことができます。

総和の記号 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ は，始まりと終わりを自由に設定することができます。

例）数列 $a_n = n$ の場合（数列：1, 2, 3, 4, 5, …, n, …）
第 n 部分和：$S_n = 1+2+3+4+5+\cdots+n$

（※特に $n=10$ と設定すると　$S_{\boxed{10}} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$）

総和の記号：$\sum_{k=1}^{n} \boxed{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \boxed{k} = 1+2+3+4+5+\cdots+n$

※ $a_{\boxed{n}} = \boxed{n}$ だが，n ではなく k で表現する　⇒　$a_{\boxed{k}} = \boxed{k}$

$\boxed{\text{演習}}$ それでは，次はどのような数の和になっているかわかりますか？

$\sum_{k=3}^{7} k = \boxed{}$

［解答］「開始番号」は $k=3$ で「終了番号」は $k=7$ だから

$\sum_{k=3}^{7} k = 3+4+5+6+7$　　（正解できましたか？）

例題　和 $\sum_{k=2}^{5} (2k-1)$ を求めよ。

［解法］「開始番号」は $k=2$ で「終了番号」は $k=5$。

よって，$\sum_{k=2}^{5}$ の右側部分 $(2\boxed{k}-1)$ に $k=2,\ 3,\ 4,\ 5$ を順次代入し，

その総和を求める

［解答］　$\sum_{k=2}^{5} (2k-1) = 3+5+7+9 = 24$

問 1.6　次の和を求めよ。　(1) $\sum_{k=1}^{5} k^2$　　(2) $\sum_{k=97}^{99} (100-k)$