4.8　微分公式(4)

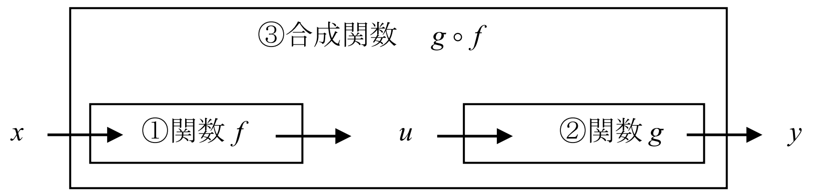
今回の微分公式は？

今回は，「合成関数の微分」を紹介します。

合成関数とは？

２つの関数 $u = f(x) \cdots$①，$y = g(u) \cdots$② において
①を②に代入してできる関数を，**合成関数**という。

［合成関数］　$y = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$



①x を関数 f に入力すると，u が出力される。　記号：$u = f(x)$
②①で出力された u を関数 g に入力すると，y が出力される。
記号：$y = g(u)$
③中間で出てくる u を消去し，x の入力から直接 y の出力を
行う関数が，合成関数 $g \circ f$ です。　記号：$y = g(f(x))$

演習　(1) $u = 2x - 3$，$y = u^4$ の合成関数は　$y = \boxed{}$

(2) 関数 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ は，次の２つの関数から合成されている。

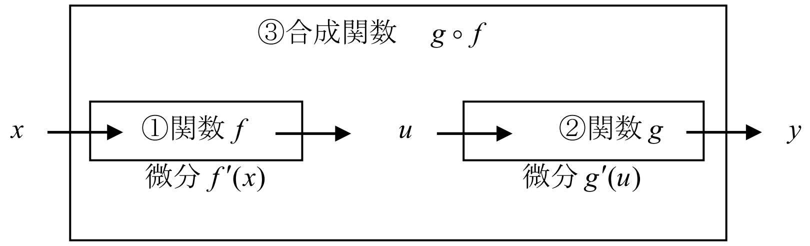
$u = \boxed{}$，$y = \boxed{}$

解答は最終行に掲載しておきますので，確認(〇付)をお願いします

解答　(1) $y = (2x - 3)^4$　(2) $u = x^2 + 1,\ y = \sqrt{u}$

「合成関数の微分」として，次の微分公式が成り立ちます。

［合成関数の微分］　$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x)$



全体[合成関数]の微分　$g'(u)\ f'(x)$

①関数 $u = f(x)$ を微分する。　記号：$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$

※左辺は Leibniz の表記法で，右辺は Newton の表記法です。
特に，Leibniz の表記法は，
上側は，関数 $u = f(x)$ の左辺の文字 u
下側は，関数 $u = f(x)$ の右辺の文字 x
を用いて表し，u を x で微分したことがわかます。

②関数 $y = g(u)$ を微分する。　記号：$\dfrac{dy}{du} = g'(u)$

③合成関数 $y = g(f(x))$ の微分は、①と②の掛け算となる。

Newton の表記法：$\{g(f(x))\}' = g'(u)\ f'(x)$

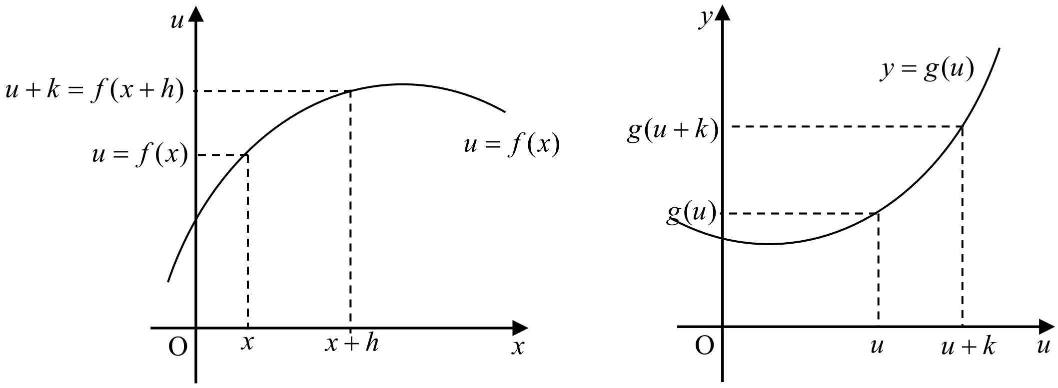
Leibniz の表記法：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\ \dfrac{du}{dx}$

※Newton の表記法は，通常はとっても簡便です。
Leibniz の表記法は，形式的に分数のように取り扱えるため
記号を用いた計算には便利です。
（実際，今回も形式的に約分すると，等式が成り立ちます。）

次の頁で証明します。

[合成関数の微分の証明]

下図のように，記号を設定します。



$u+k=f(x+h)\ [\Leftrightarrow k=f(x+h)-u=f(x+h)-f(x)\ ]\cdots$① とおく。

微分の定義より $\{g(f(x))\}'=\lim_{h\to 0}\dfrac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(u+k)-g(u)}{h} \qquad \text{(①より)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(u+k)-g(u)}{k}\times\frac{k}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{g(u+k)-g(u)}{k}}\times\boxed{\frac{f(u+h)-f(x)}{h}} \qquad \text{(①より)}$$

①より， $h\to 0$ のとき， $k\to 0$ に近づくことに注意すると

$$\{g(f(x))\}'=g'(u)\ f'(x)=g'(f(x))\ f'(x)$$

例題　関数　$y=(2x-1)^3$　を微分せよ。

［解答］　$u=2x-1$　とおくと　$y=u^3$

よって　$y'=3u^2\boxed{\times u'}=3(2x-1)^2\times 2=6(2x-1)^2$

［確認］(1) 今回は　$f(x)=2x-1$,　$g(u)=u^3$　ですね。

よって，求める微分は

$$\{g(f(x))\}'=g'(u)\ f'(x)=3u^2\times 2=6u^2=6(3x+1)^2$$

(2) 合成関数の微分(u と置いた場合)を，要約すれば

［微分公式］　$\{u^n\}=n\,u^{n-1}$

を適用した後に，

「(重要) 必ず u の導関数 u' を掛ける必要がある」

と述べています。

(3) 今回は乗数が低いので、展開して直接微分することで

正しく微分が計算されていることも確認しておきます。

$$y=(2x-1)^3=(2x)^3-3(2x)^2(1)+3(2x)(1)^2-(1)^3$$

$$=8x^3-12x^2+6x-1$$

$$y'=24x^2-24x+6=6(4x^2-4x+1)=6(2x-1)^2$$

この結果からも，導関数 u' を掛ける重要さがわかりますね。

問 2.14　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(5x-3)^4$　　　(2)　$y=(3x+2)^8$

(3)　$y=(x^2-3x+5)^3$　　　(4)　$y=\dfrac{1}{(4x-7)^6}$

＝＝

【研究：Leibniz の表記法】

合成関数　$\boxed{y=(2x-1)^3}$　を２つの関数に分ける。つまり，

$\boxed{u=2x-1}$　とおくと　$\boxed{y=u^3}$

このとき，これらを微分すると

$\boxed{\dfrac{du}{dx}}=2$　　$\boxed{\dfrac{dy}{du}}=3u^2$

$\boxed{※上側と下側の文字に注意！}$

よって，求める微分は　$\boxed{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{dy}{du}\ \dfrac{du}{dx}=3u^2\times 2=6u^2=6(2x-1)^2$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

4.9　微分公式(5)

今回の微分公式は？

今回の微分公式は，前回の微分公式

［微分公式］　$\{x^n\}' = n\,x^{n-1}$　（nは整数）

を拡張します。

［微分公式］　$\{x^n\}' = n\,x^{n-1}$　（nは有理数）

証明）まずは，1年次の復習から。
指数関数を取り扱う際に，次の内容を定義として
指数関数の拡張を行いました。思い出してください。

［累乗根の指数表記］　(1)　$x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$　　(2)　$x^{\frac{s}{m}} = \sqrt[m]{x^s}$

いま，nは分数とする。

このとき，nは2つの整数s，mを用いて　$n = \dfrac{s}{m}$ …①　と表記できる

よって　$y = x^n = x^{\frac{s}{m}} = \sqrt[m]{x^s}$　⇒　$y^m = (\sqrt[m]{x^s})^m = x^s$

故に，$y^m = x^s$　の両辺をxで微分する。
このとき，左辺には「合成関数の微分」が適用されることに注意する。
[注意：x以外の文字を，xで微分するときは，合成関数の微分となる]

$$\boxed{m\,y^{m-1}\,y'} = s\,x^{s-1}$$　［uではなく，yで実施］

$$\therefore y' = \frac{sx^{s-1}}{m\boxed{y}^{m-1}} = \frac{s}{m}\times\frac{x^{s-1}}{(\boxed{x^{\frac{s}{m}}})^{m-1}} = \frac{s}{m}\times\frac{x^{s-1}}{x^{s-\frac{s}{m}}}$$

$$= \frac{s}{m}\times x^{(s-1)-(s-\frac{s}{m})} = \boxed{\frac{s}{m}}\times x^{\boxed{\frac{s}{m}}-1} = \boxed{n}\;x^{\boxed{n}-1}$$

（※ $y = x^n = x^{\frac{s}{m}}$）　　（※ $n = s/m$）

【復習：指数法則】　(1)　$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　(2)　$a^m \div a^n = a^{m-n}$
(3)　$(a^m)^n = a^{mn}$　　(4)　$(ab)^m = a^m b^m$

従って，nが有理数(＝整数＋分数)の場合についても成り立つ。

例題　関数 $y=\sqrt{x}$ を微分せよ。

［解答］　$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$　：累乗根を指数表記に直す。

$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$　：微分形式を適用後，累乗根の表記に戻す。

問 2.15　次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{x^4}$　(2) $y=\sqrt[4]{x^3}$　(3) $y=x\sqrt{x}$

(4) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}+5\sqrt[5]{x}$　(5) $y=\left(\sqrt[3]{x}+3\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)$

例題　合成関数 $y=\sqrt{x^2+1}$ を微分せよ。

［解答］　$u=x^2+1$　とおくと　$y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$

よって，求める導関数は

$$y'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\times u'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{u}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

問 2.16　合成関数 $y=\sqrt[3]{3x+5}$ を微分せよ。