4.5 微分公式(1)

微分公式とは？

前回，導いた微分公式を再掲載します。

［微分公式］ （1） $\{1\}'=0$
（2） $\{x\}'=1$
（3） $\{x^2\}'=2x$
（4） $\{x^3\}'=3x^2$ ［問 2.10］

演習 それでは， $f(x)=x^4$ の導関数は想像できますか？

（答） $f'(x)=\boxed{}$

一般的には，次の公式が成り立ちます。

［微分公式］ $\{x^n\}'=n\,x^{n-1}$ （n は非負な整数）

※非負な整数とは，負ではない整数を意味します。
つまり，0 と正の整数(自然数)のことです。

よって， $n=4$ のときは，次の公式が成り立ちます。

（5） $\{x^4\}'=4x^3$

先程の演習は，正解しましたか。解答(○付)をお願いします。

証明）まずは復習から。

「二項定理」は覚えていますか？

「二項定理」とは， $(x+y)^n$ の展開公式のことです。

［二項定理］ $(x+y)^n = {}_nC_0 x^n y^0 + {}_nC_1 x^{n-1} y^1 + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_nC_n x^0 y^n$

【寄り道：総和の記号】

二項定理を総和の記号で表すと，次のように簡略されます。

［二項定理］ $(x+y)^n = \sum_{\boxed{k=0}}^{n} {}_nC_{\boxed{k}} x^{n-\boxed{k}} y^{\boxed{k}}$

（※開始番号は $k=0$ から）

よって，$f(x)=x^n$ に「微分の定義式」を適用すると

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\boxed{{}_nC_0x^nh^0}+{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_nx^0h^n)-x^n}{h}$$

（※ ${}_nC_0={}_nC_n=1$，$h^0=1$ より ${}_nC_0x^nh^0=x^n$）

$$=\lim_{h\to 0}\frac{{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_nx^0h^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{({}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}h+\cdots+{}_nC_nx^0h^{n-1})\ h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}({}_nC_1x^{n-1}+\boxed{{}_nC_2x^{n-2}h+\cdots+{}_nC_nx^0h^{n-1}})$$

（※h が残っている）　　　　［k 個の階乗積］

$$=\boxed{{}_nC_1}x^{n-1}=\boxed{\frac{n}{1}}\ x^{n-1}=n\ x^{n-1}\qquad \left(※\ {}_nC_k=\frac{{}_nP_k}{k!}=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k\times(k-1)\times\cdots\times 1}\right)$$

【覚え方】　①係数として前に出す

$$\{x^{\boxed{n}}\}'=\boxed{n}\ x^{\boxed{n-1}}$$

②乗数：1を引く

＝＝

【研究】①$x^0=1$ ですね。

よって，$\{x^1\}'=1\times x^0=1\times 1=1$　つまり $\boxed{(2)\ \{x\}'=1}$ が成り立ちます。

②また，$\{x^0\}'=0\times x^{-1}=0$

$x^0=1$ であることより $\boxed{(1)\ \{1\}'=0}$ が成り立ちます。

③実は，②を拡張できます。

k は実数とします。　$k=k\times 1=k\ x^0$ と表現できること　と

線形性から　$\{k\ x^0\}'=k\times\{x^0\}'=k\times 0\times x^{-1}=0$　と計算できること　から

次の結果が導けます。

$\boxed{［微分公式］(1)\ \{1\}'=0\quad\Rightarrow\quad\{k\}'=0\quad（k は実数）}$

＝＝＝

例題　関数 $y=x^4+3x^3-5x^2-2x+4$ を微分せよ。

［解法］　「線形性」と「微分公式」を適用する。

（※定数項(実数のみ)の微分は 0 [前頁【研究】参照]）

［解答］　$y'=\boxed{4x^3}+3\times\boxed{3x^2}-5\times\boxed{2x}-2\times\boxed{1}+\boxed{0}$

$=4x^3+9x^2-10x-2$

※この破線部分は，説明のために書きましたが
省略できるように，努力してください。

問 2.11　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^5$　　(2)　$y=3x^2-5x+4$

(3)　$y=(x+2)(x+3)$　　(4)　$y=x^3+3x^2-2x+4$

4.6　微分公式(2)

今回の微分公式は？

今回の微分公式は，**商の微分**と呼ばれるものを紹介します。
後日，**積の微分**と呼ばれる公式についても紹介します。

［商の微分］　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

証明）微分の定義より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}},\quad g(x)=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}$$

が成り立ちます。このとき

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)\ g(x)}$$

↓（※同じものを足して引きます）

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)\boxed{-f(x)g(x)+f(x)g(x)}-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)\ g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h\,g(x+h)\ g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+\boxed{h})\ g(x)}\left\{\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\times g(x)-f(x)\times\boxed{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}\right\}$$

$$=\frac{1}{g(x)\ g(x)}\{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

例題　関数　$y=\dfrac{3x-1}{x^2-2x+2}$　を微分せよ。

［解法］　$f(x)=3x-1,\ g(x)=x^2-2x+2$　として，商の微分を適用する。

このとき，$\boxed{f'(x)=3}$,　$\boxed{g'(x)=2x-2}$　であることに注意する。

［解答］　$y'=\dfrac{\boxed{3}\times(x^2-2x+2)-(3x-1)\times(\boxed{2x-2})}{(x^2-2x+2)^2}$

（※分母は( )^2 にする）

$$=\frac{(3x^2-6x+6)-(6x^2-6x-2x+2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{-3x^2+2x+4}{(x^2-2x+2)^2}$$

（※分母は展開しないこと！）

問 2.12　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{2}{x+1}$　　(2)　$y=\dfrac{4x+3}{x-2}$　　(3)　$y=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$

4.7　微分公式(3)

今回の微分公式は？

今回の微分公式は，１頁の微分公式

［微分公式］　$\{x^n\}'=n\ x^{n-1}$　（n は非負な整数）

を拡張します。

［微分公式］　$\{x^n\}'=n\ x^{n-1}$　（n は整数）

証明）まずは，1年次の復習から。

指数関数を取り扱う際に，次の内容を定義として

指数関数の拡張を行いました。思い出してください。

［分数の指数表記］　(1)　$x^{-1}=\dfrac{1}{x}$　　(2)　$x^{-m}=\dfrac{1}{x^m}$

いま，n は負の整数とする。

このとき，n は正の整数 m を用いて　$n=-m$ …①　と表記できる

よって　$y=x^n=x^{-m}=\dfrac{1}{x^m}$

故に，「商の微分」を適用すると

（※定数微分は0，よって，この部分は計算に寄与されない）

$$y'=\frac{\boxed{0\times x^m}-1\times mx^{m-1}}{x^{2m}}=\frac{-m\ x^{m-1}}{x^{2m}}=-m\ x^{m-1-2m}$$

$$=\boxed{-m}\ x^{\boxed{-m}-1}=n\ x^{n-1}\quad(①より)$$

【復習：指数法則】

(1)　$a^m\times a^n=a^{m+n}$　　(2)　$a^m\div a^n=a^{m-n}$

(3)　$(a^m)^n=a^{mn}$　　(4)　$(ab)^m=a^m b^m$

従って，n が整数の場合についても成り立つ。

例題　関数　$y=\dfrac{1}{x^3}$　を微分せよ。

［解答］　$y=\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$　　：まず，「－乗」を用いた指数表記に直す

$y'=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$　　：次に，「微分公式」を適用して，分数表記に戻す

問 2.13　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{2}{x}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{3x^6}$　　(3)　$y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$