§４　微分（入門編）

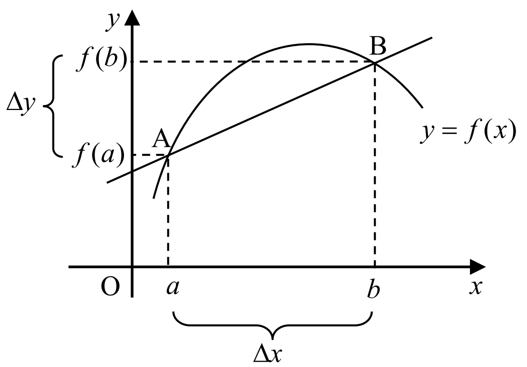
4.1　平均変化率

平均変化率とは？

関数 $y=f(x)$ において，
独立変数 x が $x=a$ から $x=b$ に変化する量を
x の**増分**といい，［記号］ $\Delta x=b-a$ で表す。
このとき，従属変数 y の変化する量を
y の**増分**といい，［記号］ $\Delta y=f(b)-f(a)$ で表す。
更に，各変数の増分の割合を**平均変化率**という。

［平均変化率］ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

（※文中の記号Δは，ギリシア文字の「デルタ」の小文字です。）



【注意】
○増分は，必ず
「変化後」から「変化前」を引く
○「平均変化率」の図形的意味は
直線ABの傾きである。

例題　関数 $f(x)=x^2+2x-3$ において，x が -1 から 3 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

［解答］ $x=-1$ のとき　$y=f(-1)=1-2-3=-4$
$x=3$ のとき　$y=f(3)=9+6-3=12$
よって，求める平均変化率は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{12-(-4)}{4}=\dfrac{16}{4}=4$

問2.7　関数 $f(x)=x^2-x-2$ において，x が -2 から 1 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

4.2　微分係数

微分係数とは？

平均変化率において，
$x=b$ を限り無く $x=a$ に近づけるとき［記号：$b \to a$］，
平均変化率の極限値を，
$x=a$ における微分係数といい，記号 $f'(a)$　で表す。

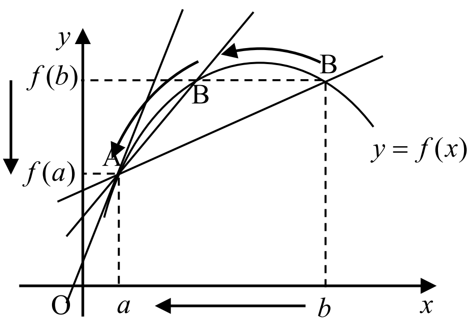
［読み：エフ　ダッシュ　エイ］

（※関数(function)記号 f の右肩に，「ダッシュ：f'」を記入）

［微分係数］　$f'(a)=\lim_{b\to a}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

※微分係数のことを，「平均変化率」に対し「瞬間変化率」とも言う。

2 点 A,B での値　　　1 点 A での値



【注意】
極限操作 $b \to a$ を行うと
点 B が点 A に限り無く
近づいていきます。
つまり，「直線 AB」は，
点 A における「接線」に
近づくことがわかります。

※復習(判別式 D)
$D>0$　のときは　2 点で交わる［交点］
$D=0$　のときは　1 点で接する［接点］
曲線に接する直線のことを「接線」といいます。

【注意：図形的な意味】
○「平均変化率」は，「直線 AB の傾き」でしたね。[前頁参照]
○「微分係数」は，点 A における「接線の傾き」になります。

しばらくは，Δx の代わりに，h を使用します。

x の増分：$h = b - a$ （ $\Leftrightarrow b = a + h$ ）…①

極限：$b \to a$ 　は　極限：$h \to 0$ …②

に置き換わります。

①と②を，前頁［微分係数］に代入して書き直します

［微分係数（書き直し)］　$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

例題　関数 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ において，$x = 2$ における微分係数を求めよ。

［解答］ $x = 2$ のとき　$f(2) = 4 + 4 - 3 = 5$

$x = 2 + h$ のとき　$f(2+h) = (2+h)^2 + 2(2+h) - 3$

$= 4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 3$

$= h^2 + 6h + 5$

よって，求める微分係数は

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h^2 + 6h + 5) - (5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+6) = 6$$

[※不定形 0/0 を因数分解か約分で解除する]

問 2.8　関数 $f(x) = x^2 - x - 2$ において，$x = 3$ における微分係数を求めよ。

4.3　導関数

導関数とは？

「平均変化率」は，ある特定な２つの値 $x=a,\ b$ を用いて計算しました。
「微分係数」は，ある特定な値 $x=a$ を用いて計算しました。
「導関数」は，値は使わず変数 x のまま，「微分係数」と同じ計算をします。

［導関数］　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

「導関数」を求めることを，**微分**するといいます。
「導関数」を求める式を，**微分の定義**といいます

例題　関数 $f(x)=x^2+2x-3$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
［解答］　$f(x)=x^2+2x-3$

$$f(x+h)=(x+h)^2+2(x+h)-3$$
$$=x^2+2hx+h^2+2x+2h-3$$

よって，求める導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2hx+h^2+2x+2h-3)-(x^2+2x-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+2)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h+2)=2x+2$$

問 2,9　関数 $f(x)=x^2-x-2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

4.4　導関数の基本性質

導関数の基本性質とは？

導関数の性質(公式)をこれから，いろいろと学習していきます。
今回は，基本性質として，**線形性**について紹介します。
[※数列_第 03 回も参照ください]

［線形性］　$\{p\ f(x)+q\ g(x)\}'=p\ f'(x)+q\ g'(x)$　（$p,\ q$ は定数）

証明）微分の定義より　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}=f'(x)$

$$\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}=g'(x)$$

このとき

$$\{p\ f(x)+q\ g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\{p\ f(x+h)+q\ g(x+h)\}-\{p\ f(x)+q\ g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{p\{f(x+h)-f(x)\}+q\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{p\times\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}+q\times\boxed{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}\right\}$$

$$=p\ f'(x)+q\ g'(x)$$

＝＝

【研究：微分記号】

「微分する」と「導関数を求める」は同じことを意味します。

数学では，関数 $y=f(x)$ に対する微分記号として，「ダッシュ」を使用します。

この記号は **ニュートンの記法**(実際は「ドット」を使用)と呼ばれます。

※物理では，「微分記号」として「ドット」が用いられます。
数学(本TEXT)では，「循環小数」の略記記号として使用しました。

［微分記号(Newton)］　y'，$f'(x)$　（$\dot{y}$，$\dot{f}(x)$）

本TEXTでは，後日になりますが，**ライプニッツの記法**も導入します。

［微分記号(Leibniz)］　$\dfrac{dy}{dx}$［読み：ディ　ワイ　ディ　エックス］

幅があるとき Δ を用い，極限後(幅は0になる)は d を用いて表現します。

［微分の定義］　$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\iff y'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

幅があるときを**差分**，極限後を**微分**(differentiation)と呼びます。

※数列の隣あう２項の差を「階差数列」として紹介しましたね。
この「階差」のことを，「第１差分」とも呼びます。

＝＝

例題　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x^2$　　(2) $f(x)=x$　　(3) $f(x)=1$

［解答］(1) $f(x)=x^2$,　$f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2hx+h^2$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2hx+h^2)-x^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$

(2) $f(x)=x$,　$f(x+h)=x+h$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$

(3) $f(x)=1$,　$f(x+h)=1$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$

問 2. 10 関数 $f(x)=x^3$ の導関数を求めよ。

上記の例題から，次の「微分公式」が導かれます。

［微分公式］　(1) $\{x^2\}'=2x$
(2) $\{x\}'=1$
(3) $\{1\}'=0$

このとき，２頁前の例題を再考してみましょう。

例題　関数 $f(x)=x^2+2x-3$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

［解答］ $f'(x)=\cdots(\text{省略})\cdots=2x+2$

［別解］「線形性」と「微分形式」を適用する。

$f'(x)=\{x^2\}'+2\times\{x\}'-3\times\{1\}'$　：線形性

$=\boxed{2x}+2\times\boxed{1}-3\times\boxed{0}$　：微分公式

$=2x+2$

【参考】 $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k-3\sum_{k=1}^{n}1$　：線形性

$=\boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}+2\times\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}-3\times\boxed{n}$　：基本公式

$=\cdots(\text{中略})\cdots=\frac{1}{6}n(n-1)(2n+11)$