第１章　数列

§１　数列

1.1　数列

数列とは？

ある規則に従って作られる数の列を，**数列**といい，
次の様な記号で表現されます。

［数列の記号］　a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，…，a_n，…

順に，第１項，第２項，第３項，第４項，第５項，…，第 n 項，…
と言います。

【注意】(1) 数列の記号は，単に $\boxed{数列\{a_n\}}$ とも表現されます。
(2) 第１項のことを，**初項**ともいいます。
(3) 第 n 項のことを，**一般項**ともいいます

演習　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を類推せよ。
［※ n 番目に現れる n に関する式を求めます］

例） 1, 2, 3, 4, 5, …　　$a_n = \boxed{n}$

(1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$　　$a_n = \boxed{}$

(2) 2, 4, 6, 8, 10, …　　$a_n = \boxed{}$

(3) 2, 4, 8, 16, 32, …　　$a_n = \boxed{}$

(4) 1, 4, 9, 16, 25, …　　$a_n = \boxed{}$

数学的な規則を見つけることができましたか？

答えは，順に　(1) $\frac{n}{n+1}$　(2) $2n$　(3) 2^n　(4) n^2　です。

演習　一般項 a_n が次式で与えられるとき，最初の５項を示せ。

例）$a_{\boxed{n}}=2\boxed{n}-1$ のとき　　　数列：1, 3, 5, 7, 9, …

［解法］$\boxed{n}$ に１を代入する　　　$a_{\boxed{1}}=2\times\boxed{1}-1=1$

以下，同様。　$n=2$ のとき　$a_2=2\times2-1=3$

$n=3$ のとき　$a_3=2\times3-1=5$

$n=4$ のとき　$a_4=2\times4-1=7$

$n=5$ のとき　$a_5=2\times5-1=9$

（1）$a_n=3n-2$　　　数列：

（2）$a_n=n(n+1)$　　　数列：

（3）$a_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　　　数列：

数の並び(数列)を復元することはできましたか？

答えは，順に　(1) 1, 4, 7, 10, 13, …　(2) 2, 6, 12, 20, 30,…

(3) 1, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{8}{27}$, $\dfrac{16}{81}$, …　[※ $a^0=1$]　　です。

1.2　漸化式

漸化式とは？

a_n と a_{n+1} の関係を表した式を，**漸化式**（ぜんかしき）と呼ぶことにする。

尚，漸化式は「初項」とあわせて与えられることが多いです。

例題　漸化式 $\begin{cases} a_1 = 1 & \cdots① \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 & \cdots② \end{cases}$ で与えられる数列の最初の５項を示せ。

［解答］　①より　$\boxed{a_1 = 1}$

②より　$n=1$ を代入　$a_2 = 2\boxed{a_1} + 1 = 2\times 1 + 1 = 3$

$n=2$ を代入　$a_3 = 2\boxed{a_2} + 1 = 2\times 3 + 1 = 7$

$n=3$ を代入　$a_4 = 2\boxed{a_3} + 1 = 2\times 7 + 1 = 15$

$n=4$ を代入　$a_5 = 2\boxed{a_4} + 1 = 2\times 15 + 1 = 31$

（答）1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$

［※この様に，a_1 から a_2，a_2 から a_3，a_3 から a_4，a_4 から a_5 $\cdots$ と順次，数列を決定してしていく作業を，**帰納的定義**と呼ぶことにします。］

問 1.1　漸化式 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$ で与えられる数列の最初の５項を示せ。

1.3　等差数列

等差数列とは？

初項 a に，定数 d を次から次に加えて作られる数列を，**等差数列**という。
特に，次から次に加えられる定数 d を，**公差**と言います。

［等差数列］　$\boxed{a}$, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $\cdots$

初項　$+d$　$+d$　$+d$　$+d$　公差

例）初項 $a=2$，公差 $d=3$ の等差数列について
最初の５項は　　　数列：2, 5, 8, 11, 14, $\cdots$

等差数列の内容を，漸化式で表すと

［等差数列の漸化式］ $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$

【参考】 $\cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots$

$a_n \xrightarrow{+d} a_{n+1}$

このとき，次の等差数列の一般項に関する公式を導出することができる。

［等差数列の一般項］

初項 a，公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

証明）等差数列の漸化式 $\begin{cases} a_1 = a & \cdots ① \\ a_{n+1} = a_n + d & \cdots ② \end{cases}$ から，導出します。

②より　$a_{n+1} - a_n = d$

このとき　$n=1$ のとき　$\cancel{a_2} - a_1 = d$

$n=2$ のとき　$\cancel{a_3} - \cancel{a_2} = d$

$n=3$ のとき　$\cancel{a_4} - \cancel{a_3} = d$

$n=4$ のとき　$\cancel{a_5} - \cancel{a_4} = d$

$\vdots$

$\vdots$

$n=n-1$ のとき　$a_n - \cancel{a_{n-1}} = d$　（＋

（$(n-1)$ 個の和）

総和をとると　$a_n - a_1 = (n-1)d$

※　n　に　$n-1$　を代入するという意味です。

※左辺は「相殺（そうさい）」されて，簡単になります

「相殺」とは，物事の相反する要素や競合する要素が、互いに差し引きされること

①より　$a_1 = a$　だから　$a_n - a = (n-1)d$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d$$

1.4　例題

例題　等差数列 2, 6, 10, 14, 18, … について，次の問いに答えよ。

(1) 初項 a と公差 d を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) 第 10 項 a_{10} を求めよ。

(4) 98 は第何項の数か求めよ。

［解答］(1) $a=2$， $d=4$

(2) $a_n = a+(n-1)d = 2+(n-1)\times 4 = 4n-2$

(3) (2)より　$n=10$ のとき　$a_{10} = 4\times 10-2 = 38$

(4) (2)より　$4n-2=98$

$4n=100$　　$\therefore n=25$　　（答）第 25 項

問 1.2　等差数列 26, 23, 20, 17, 14, … について，次の問いに答えよ。

(1) 初項 a と公差 d を求めよ。　(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) 第 10 項 a_{10} を求めよ。　(4) -19 は第何項の数か求めよ。

例題　第 5 項が 2，第 10 項が 17 である等差数列の初項 a と公差 d を求めよ。

［解法］等差数列の一般項 $a_n = a+(n-1)d$ に問題内容を組み込み，

連立 1 次方程式を解きます。

［解答］問題より $\begin{cases} a_5 = 2 \\ a_{10} = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+4d=2 & \cdots① \\ a+9d=17 & \cdots② \end{cases}$

［※ $n=5$ と $n=10$ を代入しています］

①－②より　$-5d=-15$　　$\therefore d=3$

①より　$a+12=2$　　$\therefore a=-10$

（答）初項 $a=-10$，公差 $d=3$

問 1.3　第 3 項が 24，第 6 項が 15 である等差数列の初項 a と公差 d を求めよ。