演習　極限_第 08 回

学年[2]年　学科[MI・AC・BC]　番号[　　　　]　氏名　[　　　　　　　　　　　　]

問 2.3　次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{A}{2k-1}+\dfrac{B}{2k+1}$ が恒等式となるように，定数 A, B を定めよ。

$1=A(2k+1)+B(2k-1)$ において

$k=\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$1=2A$　　$\therefore A=\dfrac{1}{2}$

$k=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$1=-2B$　　$\therefore B=-\dfrac{1}{2}$

(2) (1)の結果を利用して，数列の和 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を求めよ。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

[※最初の３項と末項($k=1$, 2, 3 と n を代入した式)を書く。]

(3) (2)の結果を利用して，級数の和 $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を求めよ。

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

問 2.4　次の関数の極限値を求めよ。

(1) $$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3x+2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{(3x+2)-2}{2(3x+2)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{3x}{2(3x+2)}=\lim_{x\to0}\frac{3}{2(3x+2)}=\frac{3}{4}$$

(3) $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{4x}-\sqrt{x+3})(\sqrt{4x}+\sqrt{x+3})}{(x-1)(\sqrt{4x}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{4x-(x+3)}{(x-1)(\sqrt{4x}+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to1}\frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{4x}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{4x}+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to1}\frac{3}{\sqrt{4x}+\sqrt{x+3}}=\frac{3}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{3}{4}$$