

問 1.13 漸化式 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2} \end{cases}$ を満たす数列の一般項は $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ であることを,

数学的帰納法を用いて証明せよ。

[1] $n=1$ のとき

(左辺) $= a_1 = 1$

(右辺) $= \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$

よって, 成り立つ

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$$a_k = \frac{1}{2^k - 1} \cdots \textcircled{1}$$

$n=k+1$ について考察する。

($n=k+1$ を代入した左辺)

$$= a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + 2} = \frac{\frac{1}{2^k - 1}}{\frac{1}{2^k - 1} + 2} \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

$$= \frac{\frac{1}{X-1}}{\frac{1}{X-1} + 2} \quad (X = 2^k)$$

$$= \frac{1}{1 + 2(X-1)} = \frac{1}{2X-1}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2^k - 1} = \frac{1}{2^{k+1} - 1}$$

$= (n=k+1 \text{ を代入した右辺})$

故に, $n=k+1$ のとき成り立つ。

[3] 従って, すべての自然数について成り立つ。