演習　数列_第 05 回

学年[ 2 ]年　学科[ MI・AC・BC ]　番号[　　　]　氏名　[　　　　　　　　　　]

**問 1.11**　次の数列の一般項を類推せよ。

(1) 1, 5, 11, 19, 29, …

求める一般項を $a_n$ とし，階差数列を $b_n$ とする。

階差数列：4, 6, 8, 10, …

よって，初項 4，公差 2 の等差数列より　$b_n = 4+(n-1)\times 2 = 2n+2$

故に，階差数列の公式より

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2) = 1+2\sum_{k=1}^{n-1}k+2\sum_{k=1}^{n-1}1 = 1+2\times\frac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)$$

$$= 1+n^2-n+2n-2 = n^2+n-1$$

(2) 2, 5, 11, 23, 47, …

求める一般項を $a_n$ とし，階差数列を $b_n$ とする。

階差数列：3, 6, 12, 24, …

よって，初項 3，公比 2 の等比数列より　$b_n = 3\cdot 2^{n-1}$

故に，階差数列の公式より　$a_n = 2+\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 2^{k-1} = 2+\dfrac{3(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$$= 2+3\cdot 2^{n-1}-3 = 3\cdot 2^{n-1}-1$$

**問 1.12**　次の漸化式を満たす数列の一般項を求めよ。

(1) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \end{cases}$　　[$r=1$ より，階差数列の公式が適用できる]

$$a_n = 0+\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

(2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2 \end{cases}$　　[$r=3,\ b_k=2$ の場合]

$$a_n = \left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^k}\right)3^{n-1} = \left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}\right)3^{n-1} = \left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}3^{n-1}$$

$$= \left[1+\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}\right]3^{n-1} = \left[1+\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{\frac{2}{3}}\right]3^{n-1}$$

$$= \left[1+\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\right]3^{n-1} = \left\{2-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}3^{n-1} = 2\cdot 3^{n-1}-1$$