

問 2.7 関数 $f(x) = x^2 - x - 2$ において、 x が -2 から 1 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

$$x = -2 \text{ のとき } f(-2) = 4 + 2 - 2 = 4$$

$$x = 1 \text{ のとき } f(1) = 1 - 1 - 2 = -2$$

よって、求める平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{-2 - 4}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

問 2.8 関数 $f(x) = x^2 - x - 2$ において、 $x = 3$ における微分係数を求めよ。

$$x = 3 \text{ のとき } f(3) = 9 - 3 - 2 = 4$$

$$\begin{aligned} x = 3 + h \text{ のとき } f(3 + h) &= (3 + h)^2 - (3 + h) - 2 \\ &= 9 + 6h + h^2 - 3 - h - 2 = h^2 + 5h + 4 \end{aligned}$$

よって、求める微分係数は

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 5h + 4) - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 5) = 5 \end{aligned}$$

問 2.9 関数 $f(x) = x^2 - x - 2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$f(x + h) = (x + h)^2 - (x + h) - 2 = x^2 + 2hx + h^2 - x - h - 2$$

よって、求める導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2 - x - h - 2) - (x^2 - x - 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 1) = 2x - 1 \end{aligned}$$

問 2.10 関数 $f(x) = x^3$ の導関数を求めよ。

$$f(x) = x^3 \quad f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \quad [1 \text{ 年次学習内容}]$$

よって、求める導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$